

2. 'IDEALNI' EFEKTI PRETHODNOG NAPREZANJA

Da bi se analiziralo stanje neke konstrukcije od homogenog elastičnog materijala - sile u preseccima, deformacije, naponi u preseccima itd., primenjuje se neka od metoda statike konstrukcija ili otpornosti materijala. Opterećenja konstrukcije usled prethodno napreznje su **'unutrašnja opterećenja'** konstrukcije, analogna dejstvu temperature ili skupljanja betona. Unutrašnja opterećenja karakteriše da izazivaju deformacije konstrukcije, ali da u slučaju kada slobodne deformacije nisu sprečene (spoljašnje statički određene konstrukcije), ne izazivaju reakcije oslonaca. U ovom delu prikazan je postupak kako da se unutrašnja opterećenja kojima kablovi za prethodno napreznje deluju na konstrukciju, zamene **'ekvivalentnim opterećenjem'** usled prethodnog napreznja. **'Efekti prethodnog napreznja'** - sile u preseccima, deformacije itd. određuju se za uticaje ekvivalentnog opterećenja shvaćenog kao spoljašnje opterećenje, nekom od metoda statike konstrukcija. Sva razmatranja odnose se na **'idealan slučaj'**, u realnosti neostvarljiv - da je **sila u kablu konstantna** celom dužinom kabla, i jednaka sili na presi kojom je kabl utegnuta. Zbog različitih neizbežnih efekata, sila u kablu - **sila prethodnog napreznja** menja se dužinom nosača već u toku uteznja kabla, a početne realizovane sile menjaju se i u toku vremena, o čemu će biti reči u narednom poglavlju. Analiza **'idealnih' efekata prethodnog napreznja** ima svoj značaj kako zbog shvatanja prirode dejstava prethodnog napreznja, tako i pri početnim približnim - **konceptijskim analizama**, koje prethode detaljnim analizama konstrukcije.

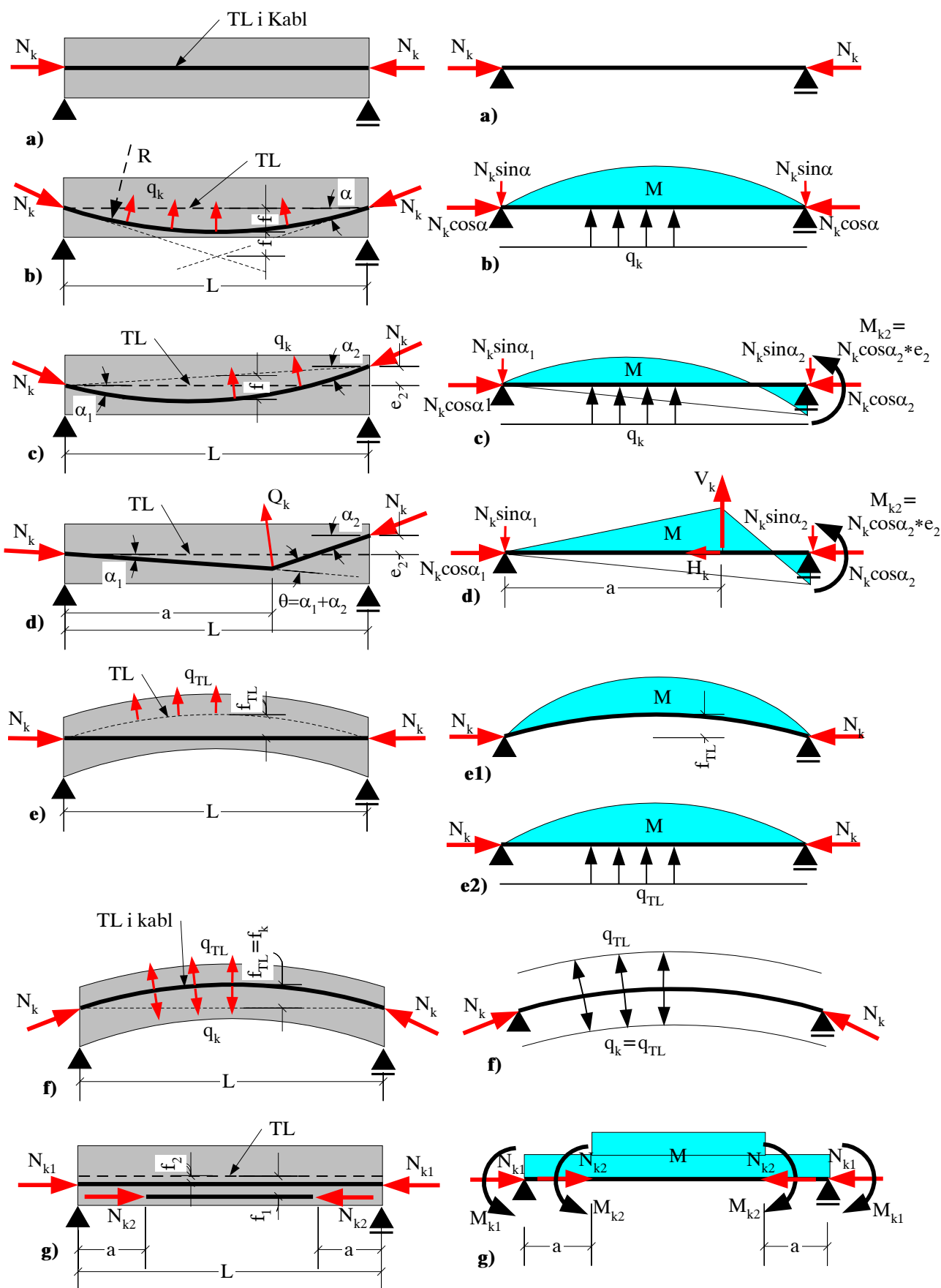
Ekvivalentna opterećenja i efekti prethodnog napreznja određuju se polazeći od usvojenog postupka prethodnog napreznja, razmatranjem stanja sila i deformacija konstrukcije u **fazi uteznja kablova**, kada se formira **početno stanje sila i deformacija** koje je osnova za sve naknadne analize. Nezavisno od toga da li je konstrukcija statički određena ili neodređena, zategnuti kabl na proizvoljno **betonsko telo konstrukcije** deluje:

- **koncentrisanim silama** na mestu kotvi;
- **koncentrisanim skretnim silama** u pravcu simetrale ugla, na mestu oštrog preloma trase kabla;
- **podeljenim skretnim opterećenjem** u pravcu centra krivine na delu kabla u krivini.

Efekti prethodnog napreznja dodatno zavise i od **ekscentriciteta kotvi** na krajevima nosača, od **oblika težišne linije** konstrukcije kao i od toga da li je konstrukcija spoljašnje **statički određena ili neodređena**.

2.1 STATIČKI ODREĐENE KONSTRUKCIJE

U slučaju statički određenih konstrukcija, u užem smislu - u slučaju **spoljašnje statički određene** konstrukcija, prethodno napreznje ne izaziva reakcije oslonaca. Svi principi ilustrovani na narednim primerima konstrukcija sistema prostih greda, slike 2.1-2, važe za sve statički određene konstrukcije.



Slika 2.1 Nosač i trasa kablova

Slika 2.2 Statički sistem, ekvivalentno opterećenje i dijagram momenata savijanja

2.1.1 Karakteristični slučajevi - koncept 'ekvivalentnog opterećenja'

Prav kabl zategnut silom N_k unosi u konstrukciju samo koncentrisane sile na mestu kotvi, slika 2.1a. Ukoliko se osa kabla - **trasa kabla** poklapa sa **težišnom linijom** nosača TZ , **ekvivalentno opterećenje** su dve sile N_k na mestima kotvi, element je aksijalno pritisnut slika 2.1b.

Krivolinijska trasa kabla na betonsko telo konstrukcije deluje kocentrisanim silama N_k na mestu kotvi, kao i **skretnim podeljenim opterećenjem** q_k duž trase kabla, slika 2.1b. Na delu kabla poluprečnika krivine R zategnutog silom N_k , intenzitet skretnog opterećenja je $q_k = N_k/R$ - 'kotlovska formula'. Za čest slučaj trasa kabla oblika kvadratne parabole, $R = L^2 / 8f$, gde su: L - dužina parabole; f - strela parabole, pa je $q_k = 8N_k f / L^2$, slika 2.1b. Skretno opterećenje deluje ka **centru krivine** kabla, ali se u slučaju '**plitkih trasa**' kablova - približno $f/L < 12$, kao dovoljno tačno usvaja da podeljeno opterećenje deluje upravno na osu nosača, slika 2.2b. Koncentrisane sile na mestu kotvi deluju pod uglom α ($\tan \alpha = 4f/L$) u pravcu tangente na osu kabla odnosno, upravno na kotvu, i mogu da se razlože na normalnu silu $N_k \cos \alpha$, odnosno transverzalnu silu $N_k \sin \alpha$ na mestu kotve, slika 2.2b. U slučaju plitkih trasa kablova ($\cos \alpha \cong 1$), za analizu se obično usvaja da je normalna sila usled prethodnog naprezanja dovoljno tačno jednaka N_k . **Ekvivalentno opterećenje** - jednako podeljeno opterećenje duž nosača i sile na krajevima, izazivaju savijanje nosača, sa maksimalnom vrednošću momenta savijanja u sredini raspona $M = q_k L^2 / 8 = N_k f$.

Ukoliko kotva na kraju nosača nije postavljena u težište preseka - 'nije centrisana', normalna sila $N_k \cos \alpha$ koja deluje na ekscentricitetu e_2 , izaziva moment savijanja na kraju nosača $N_k \cos \alpha * e_2 \cong N_k e_2$, slika 2.2c.

Na mestu oštrog prelom trase kabla, pod **skretnim uglom** $\theta = \alpha_1 + \alpha_2$, kabl zategnut silom N_k deluje na konstrukciju **koncentrisanom skretnom silom** $Q_k = 2N_k \sin \theta / 2$, koja deluje u pravci simetrale skretnog ugla θ , slika 2.1d. U slučaju plitkih trasa kablova i malih skretnih uglova, obično se za analizu usvaja da skretna sila deluje vertikalno, $V_k \cong Q_k$, dok se horizontalna komponenta H_k zanemaruje, slika 2.2d.

U slučaju nosača sa krivolinijskom ili poligonalnom **težišnom linijom** TZ , pravolinijski kabl izaziva momente savijanja usled ekscentriciteta kabla u odnosu na osu, slika 2.1e. Uticaji prethodnog naprezanja mogu da se odrede u statičkom sistemu sa realnom - zakrivljenom težišnom linijom, slika 2.2e1, ili da se usvoji 'ispravljena' - pravolinijska osa nosača i ekvivalentno opterećenje usled **krivine ose** $q_{TL} = 8N_k f_{TL} / L$, slika 2.2e2. Momenti savijanja i ugibi usled prethodnog naprezanja u slučaju greda prema slikama 2.1b i 2.1e su identični, ukoliko su iste odgovarajuće strele, $f_k = f_{TL}$.

Ako se trasa kabla u svim presecima nosača poklapa sa težišnom linijom preseka, tada je efekat prethodnog naprezanja aksijalno opterećen element silom N_k , bez obzira na oblik ose, slika 2.1f odnosno 2.2f. S obzirom da su strele ose kabla f_k i težišne linije f_{TL} jednake, skretna opterećenja usled krivine kabla q_k jednaka su skretnim opterećenjima usled krivine ose q_{TL} , ali suprotnog znaka - rezultat je da nema savijanja nosača.

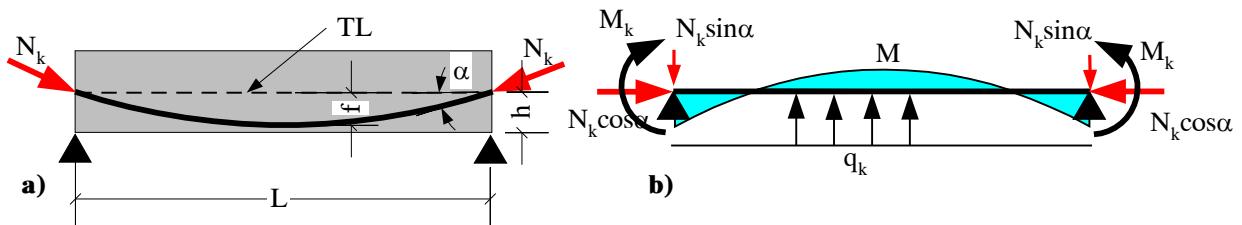
Konstrukcije se obično prethodno naprežu sa više kablova, koji ne moraju svi da budu završeni - '**ukotvljeni**' u istom preseku nosača, slika 2.1g. Svaki od kablova na mestu svoje

kotve unosi koncentrisanu silu, bez obzira na njen položaj unutar mase betone konstrukcije, slika 2.1g i 2.2g.

S obzirom na učinjenu aproksimaciju u vezi pravca dejstva skretnih sila i podeljenih skretnih opterećenja, uslov ravnoteže poprečnih sila usled ekvivalentnog opterećenja nije u potpunosti zadovoljen. U primeru na slici 2.1b odnosno 2.2b, suma vertikalnih sila na mestu kotvi iznosi $2N_k \sin \alpha$ što je **tačna vrednost**, dok je rezultanta podeljenog opterećenja u polju jednaka $q_k L = 8N_k f/L$, što je **približna vrednost**. Ako su uglovi α dovoljno mali, tada je $\sin \alpha \cong \tan \alpha = 4f/L$, pa je suma sila na krajevima jednaka $2N_k \sin \alpha = 8N_k f/L$, sistem je dovoljno tačno 'uravnotežen'.

2.1.2 Nepredvidjeni otpori prethodnom naprezanju

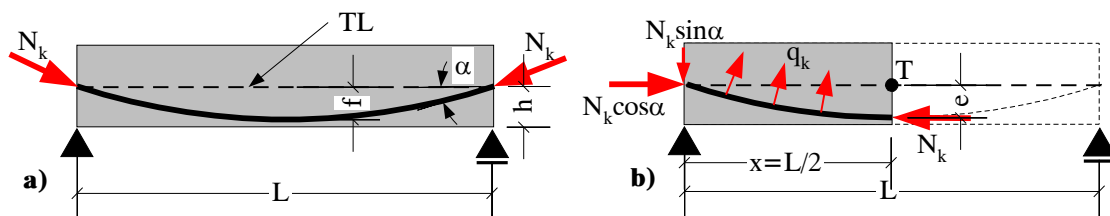
Prethodno analizirani slučajevi razmatrani su na modelu proste grede sa jednim osloncem horizontalno pomerljivim. Da bi se ostvarili očekivani efekti prethodnog naprezanja, neophodno je da se obezbedi slobodna deformacija konstrukcije pod dejstvom kablova - prethodno naprezanje je **prinudno deformisanje konstrukcije**. Ukoliko se pri utezanju kablova pojave neočekivani **otpori** slobodnom deformisanju, kao što je blokada pomerljivog oslonca proste grede na slici 2.3, na primer, rezultati će da odstupe od očekivanih, a može da dodje i do havarije, jer su u konstrukciji izazvana naponska stanja na koja ona nije osigurana.



Slika 2.3 Efekat blokade pomerljivog oslonca proste grede

2.1.3 Prethodno naprezanje kao 'sila u preseku'

Do sada razmatrani koncept **ekvivalentnog opterećenja** može da se primeni za **potpunu analizu** stanja naprezanja i deformacija **proizvoljnih konstrukcijskih sistema**. Ako nas, u slučaju **statički odredjenih nosača**, interesuje samo stanje **sila u preseku** nosača, rezultat može da se dobije i direktno.



Slika 2.4 Efekat prethodno naprezanja u nekom preseku nosača

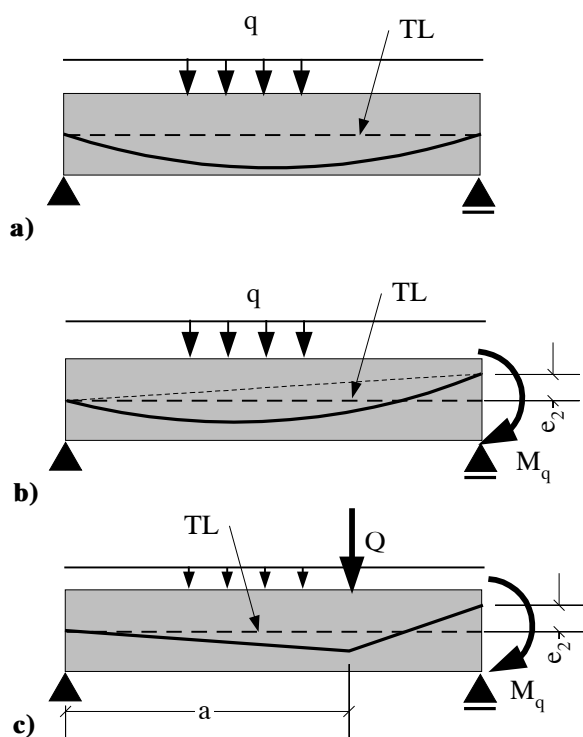
Iz uslova ravnoteže svih sila usled dejstva kablova sa jedne strane razmatranog preseka, sledi da se efekat prethodnog naprezanja može analizirati kao slučaj poprečnog preseka opterećenog **silom u kablju** N_k , koja deluje u pravcu tangente na osu kabla, na **ekscen-tricitetu** e u odnosu na težište preseka T , slika 2.4b. Za presek u sredini raspona proste grede sa paraboličnom trasom kablova, normalna sila u preseku iznosi $N=N_k$, moment savijanja u odnosu na težište preseka T iznosi $M=N_k e = N_k f$ (isti rezultat dobijen je i pri-

menom koncepta ekvivalentnog opterećenja, deo 2.1.1), dok je transversalna sila jednaka nuli, jer je tangenta ose kabla horizontalna. U presecima u kojima tangenta na osu kabla ima nagib β , pojavljuje se i transversalna sila $T = N_k \sin\beta$, dok se za veličinu normalne sile i momenta savijanja sa dovoljnom tačnošću mogu usvojiti isti izrazi kao za presek u sredini raspona, sa odgovarajućim ekscentricitetom.

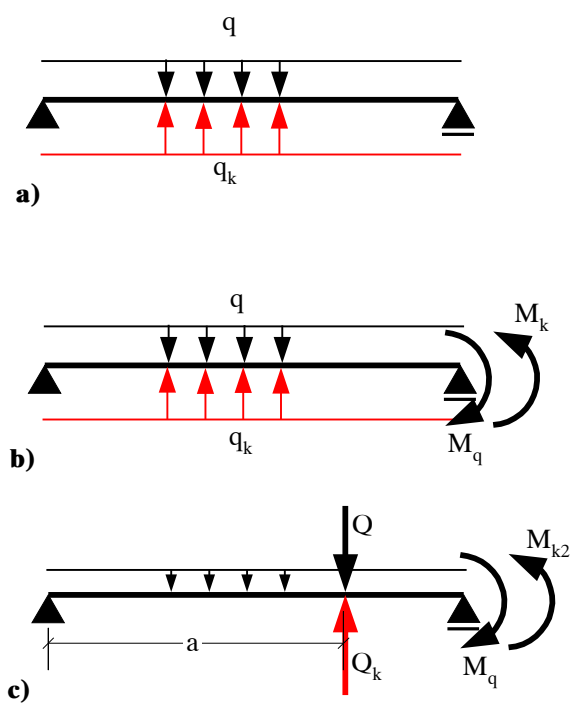
Za dokaz uslova ravnoteže svih sila sa jedne strane nosača prema slici 2.4b, neophodno je da se skretno opterećenje duž nosača q_k usvoji sa svojim realnim pravcem dejstva - u pravcu centra krivine ose kabla. Horizontalne i vertikalne komponente skretnog opterećenja q_k obezbeđuju ravnotežu, inače neuravnoteženih sila na mestu kotve i u sredini nosača, slika 2.4b.

2.1.4 Osnovi koncepta 'balansiranja spoljnih opterećenja'

Koncept **ekvivalentnog opterećenja** usled prethodnog naprezanja posebno je koristan pri preliminarnim, konceptijskim razmatranjima racionalnog oblika trase kablova, i ocene potrebnog iznosa sile prethodnog naprezanja. Osnovna ideja pri tome je, da se oblikom trase kabla izazovu ekvivalentna opterećenja koja će biti istog ili sličnog karaktera kao i spoljna opterećenja - da se kablovima **suprotstavimo dejstvu spoljnih opterećenja**, da se rezultujuće stanje opterećenja $q + q_k$ 'izbalansira' prema nekom od željenih kriterijuma.



Slika 2.5 Spoljna opterećenja i trasa kabla



Slika 2.6 Balansiranje spoljnih opterećenja

U slučaju proste grede opterećene jednako podeljenim spoljnim opterećenjem q , logičan je izbor parabolna trasa kabla, sa jednako podeljenim ekvivalentnim opterećenjem q_k , slika 2.5a i 2.6a. Izborom strele parabole f i sile prethodnog naprezanja N_k , moguće je postići različita stanja naprezanja i deformacija konstrukcije. Ukoliko $q_k = q$, spoljašnja opterećenja i ekvivalentno opterećenje u polju nosača su jednaka ali suprotnog znaka, rezultat je

aksijalno opterećena greda silom N_k , bez ugiba. Ako je to ono što smo želeli, onda smo uspeli da kablovima 'izbalansiramo' dejstva spoljnih opterećenja.

Ako na kraju grede deluje i spoljašnji koncentrisani moment savijanja M_q , tada je racionalno da se i trasa kabla izvede na čelo nosača sa ekscentricitetom e_2 , slika 2.5.

U slučaju da u polju nosača deluje koncentrisana sila Q , u odnosu na čije efekte je uticaj spoljnih podeljenih opterećenja q mali, tada je racionalno da se konstrukcija kablovima '**podupre**' na mestu dejstva sile Q , usvajanjem poligonalne trase kabla prema slici 2.5c i 2.6c.

Nakon navedenih primera, treba uočiti 'dramatičnu' razliku izmedju ovih mogućnosti i razmišljanja u odnosu na filozofiju projektovanja klasično armiranih betonskih konstrukcija. U klasičnim konstrukcijama, projektant je u '**pasivnom položaju**' u odnosu na spoljna opterećenja, može i mora da obezbedi posledice njihovog dejstva (napone, ugibe, prsline, sigurnost od loma itd.), ali ne može da im se suprotstavi, da utiče na njih. Prethodno naprezanje omogućava '**aktivan pristup**', intervenciju već na nivou rezultujućih opterećenja, tako da se neki efekti spoljnih opterećenja mogu u potpunosti i eliminisati.

2.2 STATIČKI NEODREĐENE KONSTRUKCIJE

Primer '**unutrašnje statički neodređene**' konstrukcije - cilindričnog rezervoara naveden je u uvodnim razmatranjima, uz intuitivna razmišljanja u pravcu 'ekvivalentnih opterećenja' kao i 'balansiranja' opterećenja, napona i prsline rezervoara. U slučaju da **slobodna deformacija** cilindra usled dejstva vode nije sprečena - 'membransko stanje sila i deformacija', govorimo o '**spoljašnje statički određenoj**' konstrukciji, u kojoj prethodno naprezanje ne izazova reakcije oslonaca.

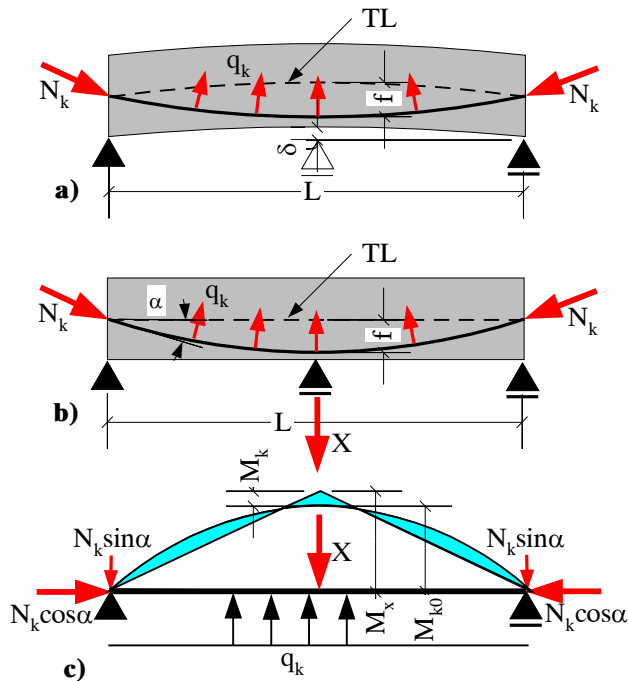
Koncept **ekvivalentnog opterećenja** je primarno sredstvo za analizu statički neodređenih konstrukcija, bilo ručnim metodama ili uz primenu računara. Medjutim, projektant nije uvek u mogućnosti da izabere trasu kablova čije će ekvivalentno opterećenje direktno da balansira spoljna opterećenja kao u prethodnim primerima - površinske ljuskaste konstrukcije, na primer. Najopštiji princip je da kablove treba voditi približno toku **trajektorija napona zatezanja** usled spoljnih opterećenja, kao što se konačno vodi i armatura klasično armiranih konstrukcija.

U slučaju **statički neodređenih linijskih nosača** - greda i ramova, koji se najčešće i primenjuju, moguće je formulisati skup jednostavnih pravila, pogodnih za svakodnevnu praksu.

2.2.1 Efekat sprečenih slobodnih deformacija - 'sekundarni uticaji'

Pretpostavimo da se prosta **greda bez težine** sa slika 2.1b i 2.2b u toku utezanja kablova, odmah 'zakačila' za nešto u sredini raspona. Da nema tog 'nepredvidjenog otpora' deformacijama, o čemu je bilo reči u delu 2.1.2, greda bi se usled dejstva samo prethodnog naprezanja izdigla, sa maksimalnim ugibom δ u sredini raspona, slika 2.7.a. Ako neki objekat sprečava odizanje grede u sredini raspona, onda taj isti objekat mora da bude sposoban da izdrži silu 'čupanja' X , koja se suprotstavlja potisku kablova i sprečava pojavu ugiba u sredini raspona. Sila 'čupanja' se obično naziva 'statički nepoznata sila', koja se, po 'metodi sila',

upravo i određuje iz uslova da, pod istovremenim dejstvom ekvivalentnog opterećenja q_k i sile X , ugib na mestu dejstva sile X bude jednak nuli. Ako 'objekat' koji ometa deformacije nije beskonačno krut, govorimo o 'popustljivom osloncu', koji može da bude i 'elastičan'.



Slika 2.7 Prethodno naprezanje proste grede sa sprečenim odizanjem na srednjem osloncu

U ovoj 'incidentnoj' situaciji, a dešava se i to, umesto sistema proste grede, ustvari se prethodno napreže sistem kontinualne grede preko dva polja, ali to nismo želeli, jer ne bi trasu kablova tako postavili!

Jedan od ciljeva prethodnog naprezanja **proste grede** bila je vrednost momenta u sredini raspona $M_{k0} = -N_k f$, koji zateže gornju stranu grede, slika 2.7.c. Reakcija srednjeg oslonca 'neželjenog kontinualnog nosača' preko dva jednaka polja, ukupnog raspona L , usled podeljenog ekvivalentnog opterećenja $q_k = 8N_k f / L^2$ iznosi $X = 5q_k L / 8$. Momenta savijanja u preseku nad srednjim osloncem usled sile X iznosi $M_X = 5q_k L^2 / 32 = 5N_k f / 4$ i zateže donju stranu grede, tako da je rezultujući moment u preseku nad srednjim osloncem jednak $M_k = N_k f / 4$, i zateže donju stranu grede, slika 2.7.c. Promašili

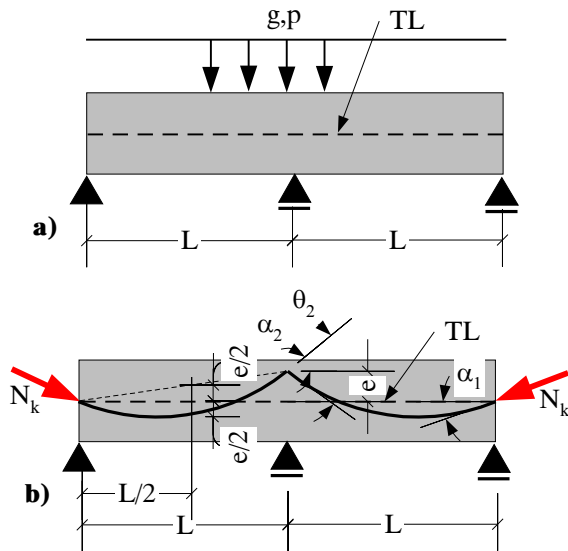
smo vrednost, ali i znak uticaja. Uticaji usled 'statički nepoznatih' reakcija oslonaca nazivaju se i **sekundarni uticaji** usled prethodnog naprezanja, što ima smisla, ali se može čuti i za izraz 'parazitni uticaji', što sugeriše da tu nešto nije u redu!?

Navedeni primer je 'incident', ali je princip analize isti i u slučaju kada je konstrukcija stvarno statički neodređeni kontinualni nosač preko dva polja. Uticaj kablova 'modelira' se ekvivalentnim opterećenjem, i nakon toga se radi uobičajeni statički proračun nekim od raspoloživih postupaka - tablice, programima za računare itd.. U ovom slučaju, analiza se zasnivala na tzv. 'metodi sila'.

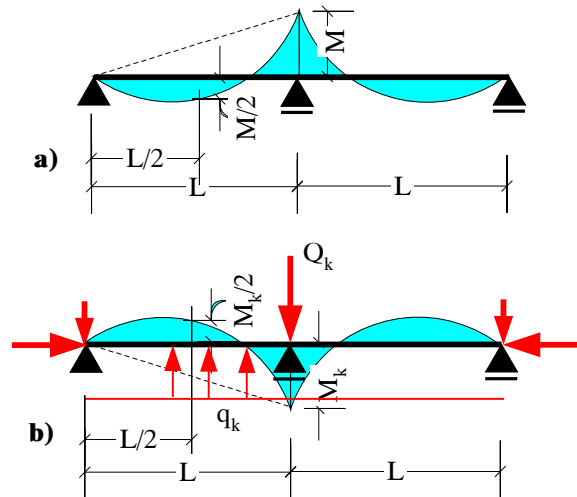
2.2.2 Izbor oblika trase kablova

Komentar uz prethodni primer bio je da 'trasu kablova ne bi tako izabrali, da smo znali da je u pitanju kontinualni nosač'. Šta ne valja ovoj trasi u slučaju da je nosač kontinualan, slika 2.7.b? Efekat kablova je normalna sila u preseku $N = N_k$, kao i u slučaju proste grede. Ekvivalentno opterećenje u polju q_k potiskuje nosač na gore, čime se koriguju momenti i ugibi usled spoljnih opterećenja. Sa te strane, trasa je moguća, ali može i bolje. Veliki nedostatak ovakve trase je što iznad srednjeg oslonca prolazi donjom stranom preseka. Već je rečeno da se nakon prethodnog naprezanja, za uticaje naknadnih opterećenja, čelik kablova ponaša **kao klasična armatura**, pa ga onda treba i postaviti tamo gde mu je mesto, u zonu preseka koja je zategnuta usled dejstva dodatnih opterećenja - u **gornju zonu** preseka nad srednjim osloncem, slika 2.8b! Ako u nosaču sa slike 2.7b ne bi bilo klasične armature iznad srednjeg oslonca, porastom spoljnih opterećenja iznad nivoa opterećenja u eksploataciji, prvo bi nastupio gubitak prethodno unetih pritisaka na gornjoj ivici preseka nad

osloncem - tzv. **'dekompresija preseka'**, potom bi došlo do pojave prslina i ubrzo do **loma preseka** nad osloncem, koji je 'nearmiran u zategnutoj zoni'. To ne mora da znači da je nastupio i **lom konstrukcije** u smislu da su i životi ugroženi, polazni kontinualni nosač prešao bi u stanje dve proste grede raspona $L/2$, sa ne baš optimalnom trasom kablova.



Slika 2.8 Kontinualni nosač i korigovana trasa kablova



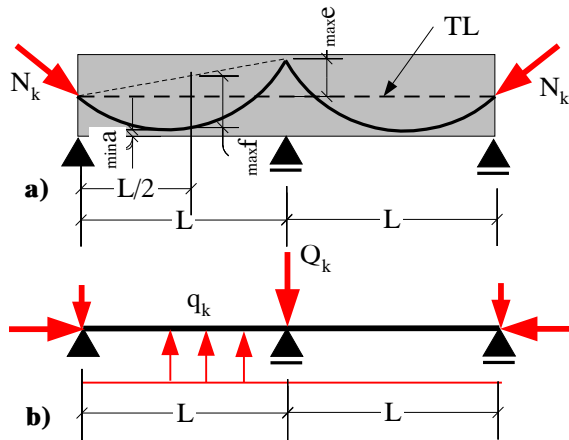
Slika 2.9 Momenti savijanja kontinualnog nosača

Konkretan primer 'korigovane trase' kablova, kod koje je strela kablova f jednaka ekscentricitetu kablova e iznad srednjeg oslonca, prikazan je na slici 2.8a,b. Poznati oblik dijagrama momenata savijanja M usled dejstva podiznih spoljnih opterećenja $g i p$ prikazan je na slici 2.9a. Za usvojenu trasu kabla prema slici 2.8a, ekvivalentno opterećenje i dijagram momenta savijanja usled prethodnog napreznja M_k prikazani su na slici 2.9b.

Intenzitet podiznog skretnog opterećenja iznosi $q_k = 8N_k f / L^2 = 8N_k e / L^2$, jer je $f=e$. Reakcija srednjeg oslonca usled ekvivalentnog opterećenja q_k iznosi $R_k = 10q_k L / 8 = 10N_k / L$. Ugao tangente parabole nad osloncem iznosi $tg\alpha_2 = 5e/L$, odnosno vrednost skretnog ugla trase kablova iznad oslonca iznosi $\theta_2 = 2\alpha_2$, slika 2.8.b. Skretna sila Q_k na mestu preloma trase iznad oslonca jednaka je $Q_k = 2N_k \sin \theta/2$. Može da se pokaže da je, za plitke trase kablova i male skretne uglove $Q_k = R_k$, odnosno da parabolična trasa kabla sa strelom jednakom ekscentricitetu iznad srednjeg oslonca ne izaziva reakcije oslonaca, iako je sistem statički neodređen. Uticaji usled prethodnog napreznja ovakvom trasom jednaki su uticajima u statički određenoj gredi raspona $2L$, kao da je uklonjen srednji oslonac. Moment usled prethodnog napreznja nad srednjim soloncem iznosi $M_k = N_k e$, a u preseku u sredini polja $M_k = N_k e / 2$.

Trase kablova kod kojih su uticaji jednaki uticajima u statički određenim nosačima nazivaju se i **'konkordantnim'** trasama. Treba uočiti da je trasa kabla na slici 2.8.b **afina** sa dijagramom momenata na slici 2.9a. Ordinate trase kablova mogu da se dobiju deljenjem dijagrama momenata nekom konstantom, koja ima značenje vrednosti sile u kابلu N_k . Može da se dokaže da je svaka trasa kabla, dobijena **preslikavanjem dijagrama momenata** proizvoljnog ravnotežnog sistema spoljnih sila, ujedno i konkordantna. Prednost ovih trasa je što ne mora da se vrši analiza u statički neodređenom sistemu, i to je sve, ove trase ne moraju da budu i optimalno rešenje. Ako trase sa dubljim strelama i većim ekscentricitetom iznad srednjih oslonaca generišu i veća ekvivalentna opterećenja, onda njima treba dati

prednost, potrebne su manje sile prethodnog naprezanjam, slika 2.10. Naravno da oblik

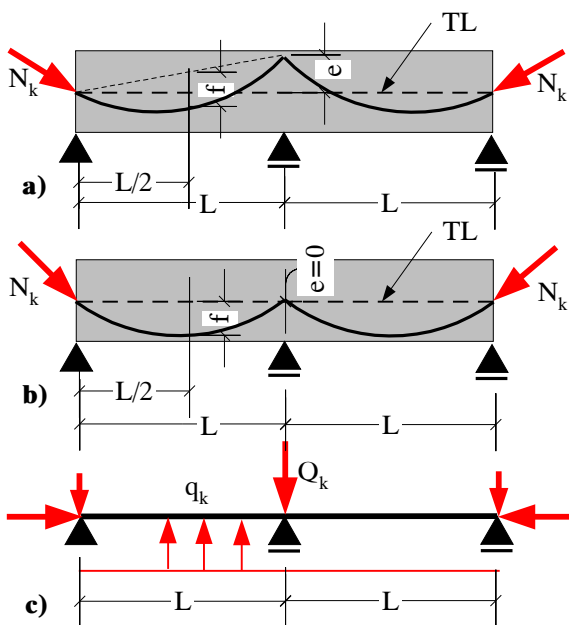


Slika 2.10 Trasa kabla sa maksimalnim ekscentricitetom i strelom

naka nuli. Kako je $X = -\delta_{10} / \delta_{11} = 0$, treba rešiti jednačinu $\delta_{10} = 0$, u kojoj je strela kabla f jedina nepoznata. Rešenje je, naravno, $f=e$.

2.2.3 'Linearne transformacije' trase kablova

Na slici 2.11a odnosno 2.11b, prikazana su dva slučaja trase kabla sa jednakom strelom f i jednakom silom u kablu N_k , ali sa različitim **ekscentricitetima e iznad oslonaca**. Zbog različitih uglova trase kabla na krajevima nosača, razlikuju se i normalna odnosno transversalna komponenta sile prethodnog naprezanja na **'čelu nosača'**, što u ovom slučaju nije bitno.



Slika 2.11 Ekscentricitet kabla iznad oslonaca ne utiče na momente i deformacije

'plan kablova'. Ne treba zaboraviti na razloge iznete u delu 2.2.2, koji govore u prilog trasa sa maksimalnim ekscentricitetom kablova iznad oslonaca, slučaj 2.11.a.

trase treba izabrati prema karakteru spoljnih opterećenja, prema principima 'balansiranja', o čemu je bilo reči. Analiza statički neodređenih sistema danas stvarno više nije problem.

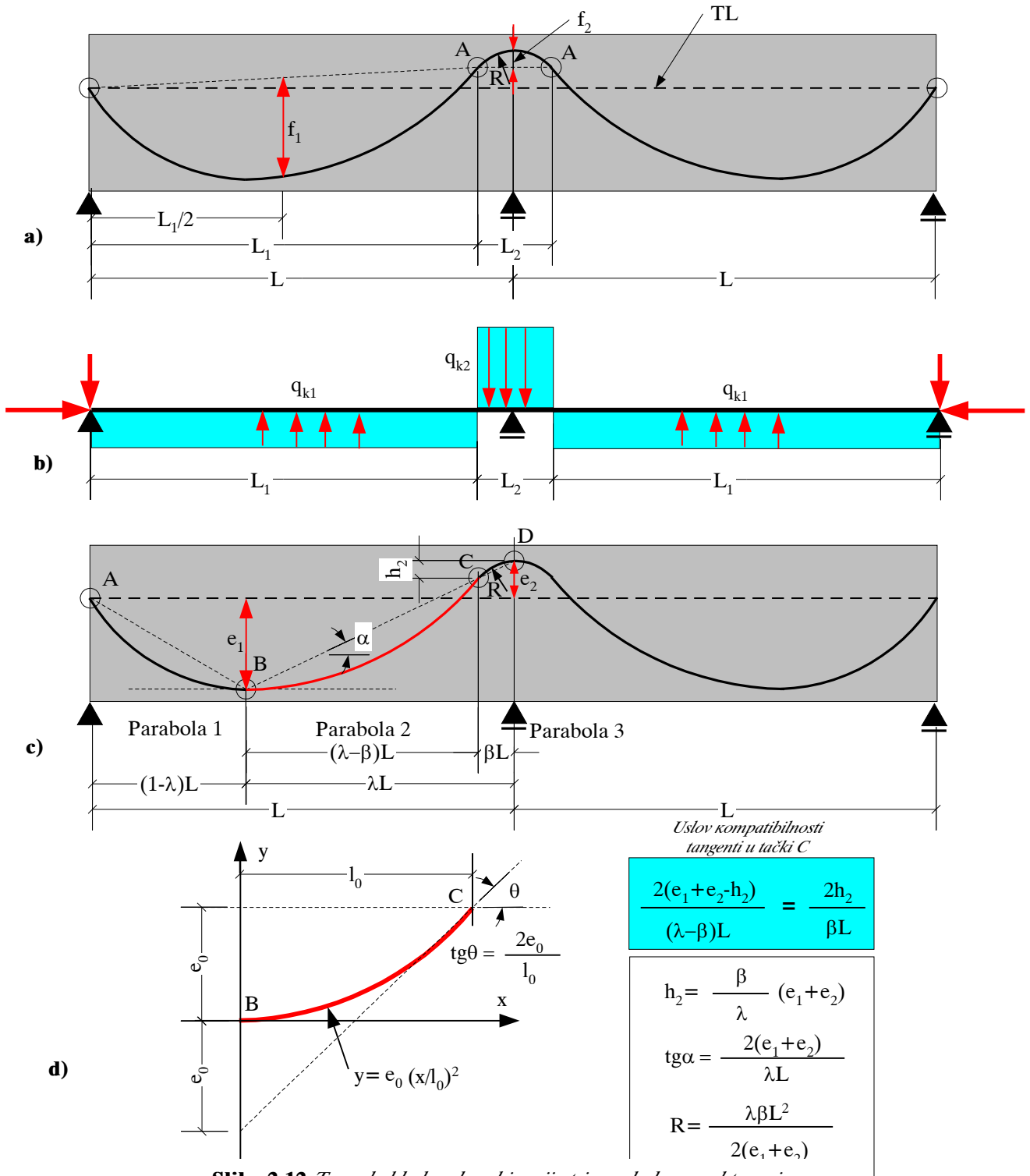
Indirektan dokaz da je navedena trasa konkordantna, može da se dobije odgovorom na pitanje: 'dat je ekscentricitet e iznad srednjeg oslonca - kolika treba da je strela f pa da trasa bude konkordantna?'. Ako se koristi 'metoda sila', tada treba odgovoriti na pitanje kolika treba da je strela, pa da vrednost 'stički nepoznate' X na srednjem osloncu bude jednaka nuli.

S obzirom da su u oba slučaja strele parabole f , i sila u kablu N_k jednake, identično je i skretno opterećenje q_k u poljima nosača, slika 2.11c. Od komponenti **ekvivalentnog opterećenja**, razlikuju se jedino koncentrisane sile na osloncima kontinualnog nosača, ali ove sile ionako ne utiču na momente savijanja i deformacije konstrukcije. Zaključak: Zadržavajući silu N_k i strelu f konstantnim, trasa kabla može iznad oslonaca da ima **provoljan ekscentricitet e** - momenti i ugibi usled prethodnog naprezanja se ne menjaju. 'Mrdanje' trasa iznad oslonaca se iz nekih razloga naziva **'linearne transformacije'**.

Ova osobina je vrlo korisna pri izboru trasa kablova, ali i kada dodje vreme da se konstruišu stvarne trase - da se uradi

2.2.4 Oblikovanje realnih trasa kablova

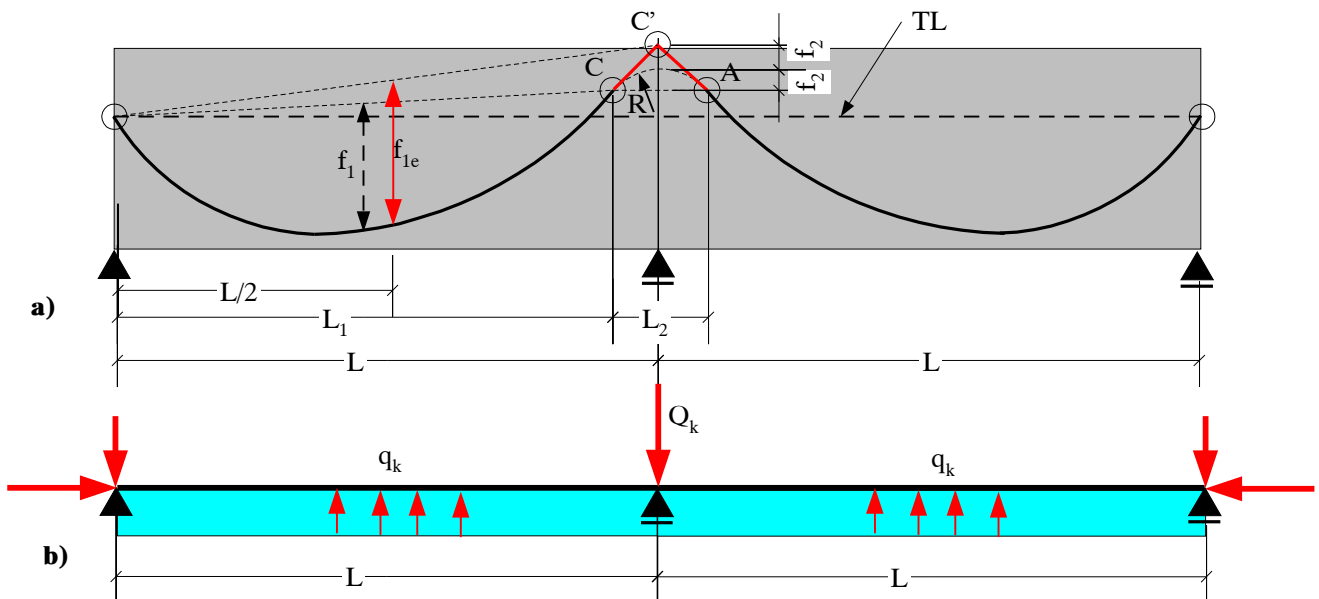
U dosadašnjim razmatranjima, trase kablova su prikazivane kao kombinacije paraboličnih i pravih delova trase, sa ili bez oštih preloma trase pod skretnim uglom θ . Već i samo baratanje parabolama zaslužuje malo pažnje, dok pitanje 'oštrih' preloma trase kabla uopšte nije akademsko - **kablovi ne smeju, a i ne mogu da se oštro prelamaju!**



Slika 2.12 Trasa kabla kao kombinacija tri parabole, sa zahtevanim poluprečnikom krivine R iznad oslonca

O **minimalnim dozvoljenim poluprečnicima krivina kablova** R već je bilo govora u delu 1. Do sada korišćene oblike trasa nazovimo 'idealizovanim', zgodnim za analizu, ali u jednom trenutku posla, trase kablova moraju da dobiju svoj realni oblik, slika 2.12.

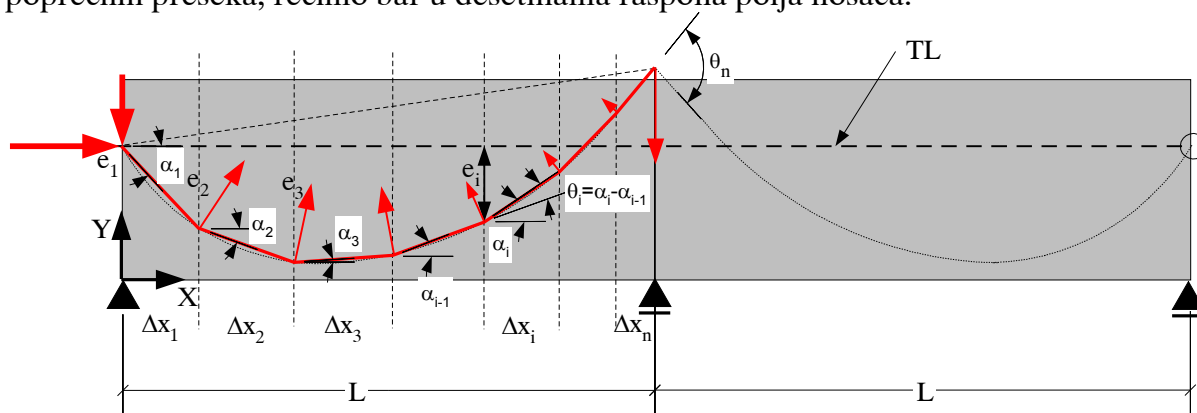
Na slici 2.12a prikazana je realna trasa kablova, kombinacija parabole u polju sa strelom f_1 , i parabole ili kružnice iznad srednjeg oslonca na dužini L_2 sa strelom f_2 , odnosno poluprečnikom krivine R . Minimalni poluprečnici krivine kabla na 'mestu oštrog preloma' zavise od krutosti kabla, i definisani su od strane svakog proizvođača. Realno **ekvivalentno opterećenje** usled prethodnog naprezanja tada ima oblik prema slici 2.12b. Rezultati proračuna obično nemaju značajnija odstupanja u odnosu na trase sa oštrim prelomima. Matematičko definisanje trase kablova nije stvar propisa, ali je na slici 2.12c i 2.12d prikazano jedno od rešenja, kombinacija tri kvadratne parabole nastavljene tako da na mestima kontinuiteta imaju **zajedničke tangente** - 'glatka trasa kablova'. Parabole 1 i 2 u prvom polju postavljene su tako da imaju imaju horizontalnu tangentu u tački B , i opisane su izrazima na slici 2.12d. Parabola 3 definisana je zahtevanim poluprečnikom krivine R , i uslovom da ima zajedničku tangentu sa parabolom 2 u tački C . Rezultat je da tačka C leži na pravoj $B-D$. Vrednosti potrebnih parametara za konstruisanje parabola date su na slici 2.12.d.



Slika 2.13 Korigovana računaska trasa kabla sa oštrim prelomom iznad srednjeg oslonca

Ako se računске analize urade sa ekscentricitetom e trase oštro prelomljenog kabla iznad srednjeg oslonca, naknadno zaobljenje trase kabla neminovno smanjuje **realni ekscentricitet**. Da bi računski i realni ekscentricitet iznad oslonca bili nekako usaglašeni, na slici 2.13 prikazano je **korigovana računaska trasa** kabla. Ako želimo da iznad oslonca imamo ekscentricitet e , a znamo i da se trasa mora zaobliti, računski prihvatljivo rešenje je da se zaobljena trasa postavi na željeni ekscentricitet e , da se potom u zavisnosti od R definiše parabola 3 sa strelom f_3 , i da se oštar prelom računске trase usvoji u tački C' na odstojanju f_3 od temena parabole 3, slika 2.13. S obzirom da je skretni ugao trase izmedju tačaka C i A iznad oslonca isti u oba slučaja, rezultanta skretne sile Q_k iznad oslonca je ista. Računsko ekvivalentno opterećenje u prvom polju definisano je rasponom L i strelom f_{1e} , slika 2.13.

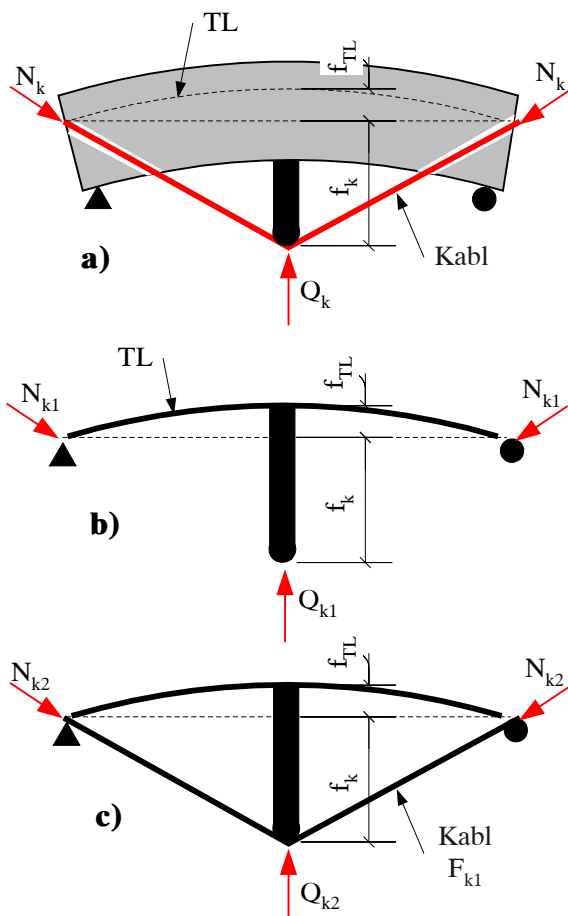
Pri definisanju realnih trasa kablova i pripremi **'planova kablova'** za izvođenje, na kraju treba u nekom koordinatnom sistemu definisati koordinate svakog kabla u dovoljnom broju poprečnih preseka, recimo bar u desetinama raspona polja nosača.



Slika 2.14 Numerički definisana trasa kabla u diskretnom broju preseka konstrukcije

Kao što je već rečeno u delu 1, kablovi, odnosno cevi kablova se duž nosača postavljaju na držače, 'stolice' rasporedjene u određenom broju tačaka zavisno od krutosti kabla, recimo na razmaku od 1,0m. Realni kabl je lako zamisliti kao poligonalnu trasu, sa prelomima u diskretnom broju tačaka. Nezavisno od opisanog realnog oblika trase, numeričko definisanje kabla kao **poligonalne trase**, sa koordinatama i skretnim uglovima definisanim u diskretnom broju tačaka je zgodno za numeričku analizu putem programa za rad sa tabelama tipa 'Excel'.

2.2.5 Spoljašnje prethodno naprezanje



Vodjenje kablova kroz masu betona, tzv, **unutrašnje prethodno naprezanje** je tradicionalan način gradjenja, sa osnovnom željom da beton štiti kablove od **korozije**. Vodjenje kablova van mase betona konstrukcije, sa vezom sa konstrukcijom ostvarenom u diskretnom broju tačaka, tzv. **spoljašnje prethodno naprezanje** ima određenih prednosti, ali i mane. O prednostima je već bilo reči u delu 1, a kao mane se mogu navesti složenija zaštita kablova od požara kao i od diverzija, namernog oštećenja ili presecanja kablova.

Računska analiza ovog tipa konstrukcija ima svojih specifičnosti. Na slici 2.15 prikazan je koncept jednog nosača, koji je spoljašnje statički određen, ali je u isto vreme unutrašnje statički neodređen.

Slika 2.15 Spoljašnje prethodno naprezanje u fazama

U fazi utezanja prvog kabla, slika 2.15b, sistem je statički odredjen, prosta greda opterećena ekvivalentnim opterećenjem N_{kl} i Q_{kl} . Za ove sisteme je karakteristična povećana deformabilnost u fazi prethodnog naprezanja, zbog velikog kraka kablova - strele f_k . Kada se pristupi utezanju drugog kabla, prvi kabl površine F_{kl} sa svojom aksijalnom krutošću deo je složenog, unutrašnje statički neodredjenog 'dvopojasnog sistema', slika 2.15c. Utezanje drugog kabla deformiše konstrukciju na gore, i time obara prethodno unete sile u kابلu 1 - pojavljuju se '**elastični gubici sile prethodnog naprezanja**', o čemu će biti reči u narednom poglavlju. Sa stanovišta analize, nevolja je što se utezanjem svakog narednog kabla menja i **krutost sistema**, pa bi trebalo u svakom koraku ponovo računati matricu krutosti sistema. Postoje algoritmi koji zadržavaju matricu konstantnom, ali u svakom koraku utezanja kablova barataju sa 'fiktivnim silama' prethodnog naprezanja, ali to nije predmet ovoga kursa. Nakon završenog prethodnog naprezanja, gornji betonski pojas i donji, čelični pojas od kablova kao konstrukcijska celina prihvataju dodatna opterećenja. Izborom strele trase i veličine sile u kابلu, mogu vrlo efikasno da se kontrolišu naprezanja i deformacije gornjeg betonskog pojasa.

Principijelno, pitanje je da li ovakve sisteme treba smatrati 'prethodno napregnutim' u klasičnom smislu, ili je u pitanju klasično armirana greda poduprta kablovima, poznati 'sistemi podupirala'? Za ilustraciju, u ovom slučaju kablovi ne učestvuju u graničnoj nosivosti preseka betona. Izloženi koncept može da se primeni i u čeličnim ili drvenim konstrukcijama, tamo gde se ukaže potreba.

2.2.6 Različita konstrukcijska rešenja trasa kod linijskih sistema

Na slici 2.16 prikazan je deo slučajeva realizacije prethodnog naprezanja koji se primenjuju u praksi.

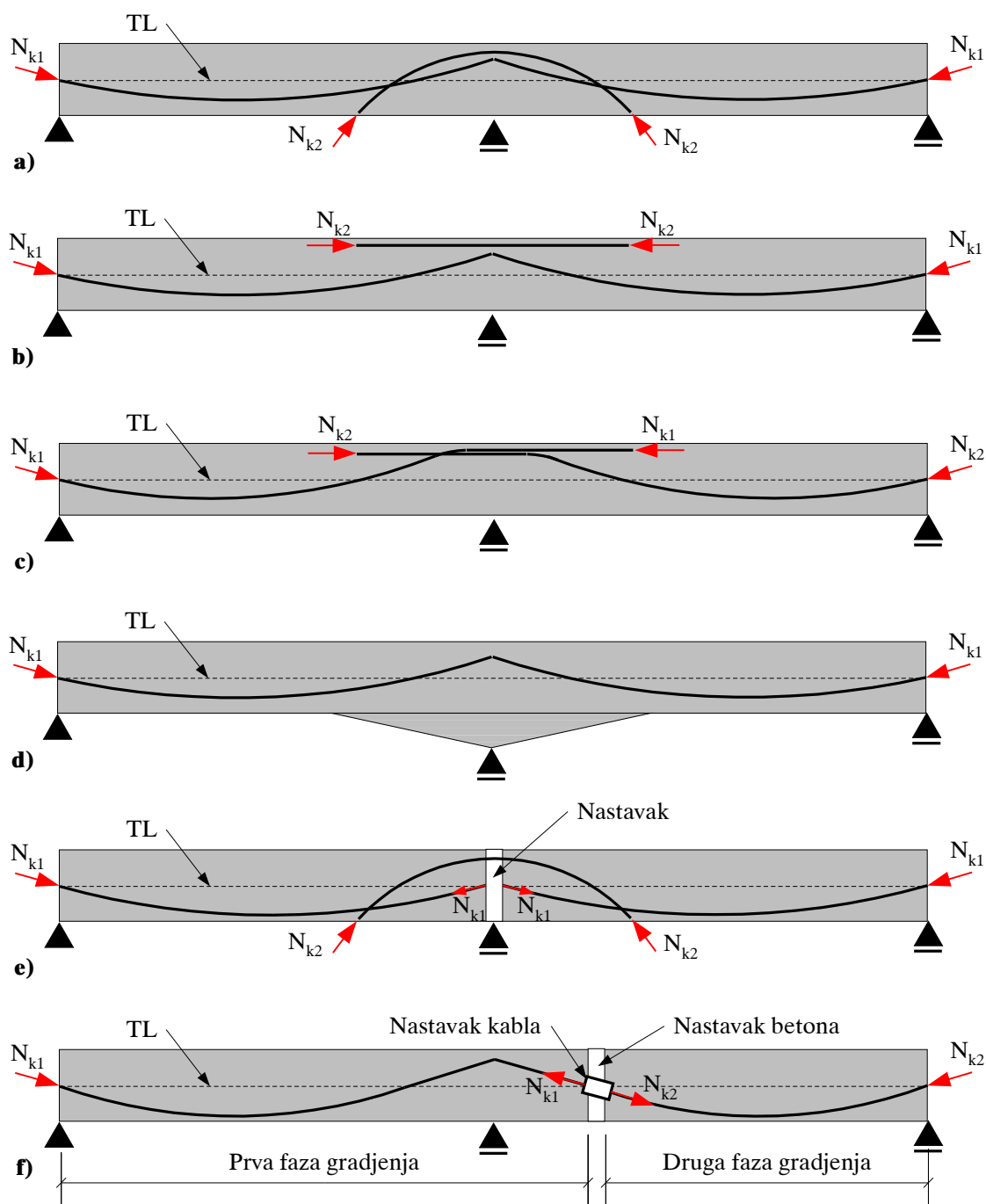
Prva tri primera podsećaju na koncept armiranja klasičnih armiranobetonskih kontinualnih nosača, sa povećanjem armature iznad oslonaca, na mestu najvećih momenata. Prikazana rešenja ne moraju uvek da budu i najracionalnija: kratki kablovi povlače za sobom određene probleme, povećava se broj kotvi pa i ukupni troškovi, a sa povećanjem kotvi povećava se i broj potencijalno osetljivih mesta na koroziju. Danas je trend da se prethodno naprezanje izvodi sa što manje kotvi na licu konstrukcije.

Varijanta sa jednom trasom kablova, i povećanjem nosivosti preseka nad srednjim osloncem pomoću vute, prikazana je na slici 2.16d. Ovo rešenje tipično je za kontinualne konstrukcije mostova, na primer.

Kablovi za prethodno naprezanje često se koriste za spajanje - 'kontinuiranje' delova konstrukcije izvedenih montažno. U slučaju mostova, klasičan primer je konzolni sistem gradjenja kontinualnih sistema mostova, sa spajanjem novih segmenata i već izvedene konzole uz pomoć kablova za prethodno naprezanje. Na slici 2.16e prikazan je slučaj konstrukcije izvedene od dveju montažnih prethodno napregnutih greda, koje su nakon montaže kontinuirane uvodjenjem dodatnog kabla iznad srednjeg oslonca. Pre utezanja dodatnog kabla, potrebno je 'plombirati' betonom montažni nastavak iznad oslonca.

Na slici 2.16f prikazan je čest koncept segmentnog - faznog gradjenja kontinualnih konstrukcija. U prvoj fazi izvodi se i prethodno napreže deo grede sa prepustom. Nakon izvodjenja narednog segmenta, vrši se nastavljjanje kabla izvedenog u prvoj fazi i utezanje sa

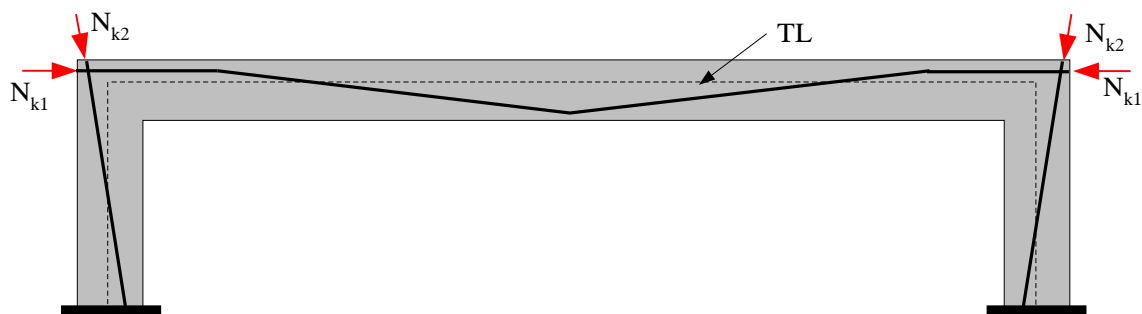
desnog kraja konstrukcije (videti i sliku 1.14). Pre utezanja dodatnog kabla, potrebno je 'plombirati' betonom montažni nastavak konstrukcije.



Slika 2.16 Različiti slučajevi vođenja kablova

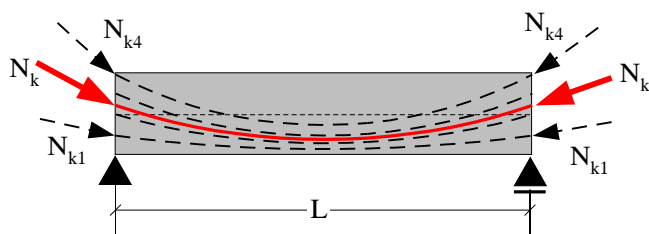
Mesto nastavka kablova na prepustu nije izabrano samo zbog toga što su u toj zoni najmanji momenti usled spoljnih opterećenja, već i zbog toga što je trasa kabla u toj zoni neznatno zakrivljena, što je povoljno za funkcionisanje složenih 'nastavnih kotvi'. Upotreba nastavnih kotvi, pogotovo 'aktivnih', preko kojih se doteže i prethodno utegnitu kabl ima i svojih protivnika, nisu baš opšte prihvaćene.

Pod linijskim sistemima ne podrazumevaju se samo gredne konstrukcije, već i **ramovske** - okvirne konstrukcije, slika 2.17.



Slika 2.17 Prethodno napregnuta ramovska konstrukcija

Trasa kablova na slici 2.17 prati liniju momenata savijanja usled spoljnih opterećenja. Iako je stub **'prirodno prethodno napregnut'** normalnom silom od spoljnih opterećenja, ponekada veliki momenti savijanja, kao i transverzalne sile u stubu zahtevaju da se i oni prethodno napregnu - tipično za 'plitke ramove', sa stubovima relativno male visine u odnosu na raspon.



Slika 2.18 Sistem kablova i njihova rezultanta

Za kraj priče o linijskim konstrukcijama, još dva detalja. U većini dosadašnjih primera govorilo se o 'kابلu', i prikazivana je jedna linija koja predstavlja trasu kabla. U praksi, konstrukcije se prethodno naprežu sa **snopom kablova** koji se vode kroz konstrukciju, videti i sliku 2.16. Najtačnije je, naravno, modelirati svaki kabl ponaosob, ali se to primenjuje u samo kada se proceni da modeliranje i proračun efekata prethodnog naprezanja pomoću **rezultante sila u kablovima** nije dovoljno tačno. U slučaju klasično armiranih preseka, rezultanta zatezanja u armaturi obično se usvaja u težištu preseka armature. S obzirom da nam je potrebna rezultanta sila, a ne moraju svi kablovi da budu utegnuti do iste sile, težište površine kabla ne mora biti i položaj rezultante sila N_k , slika 2.18.



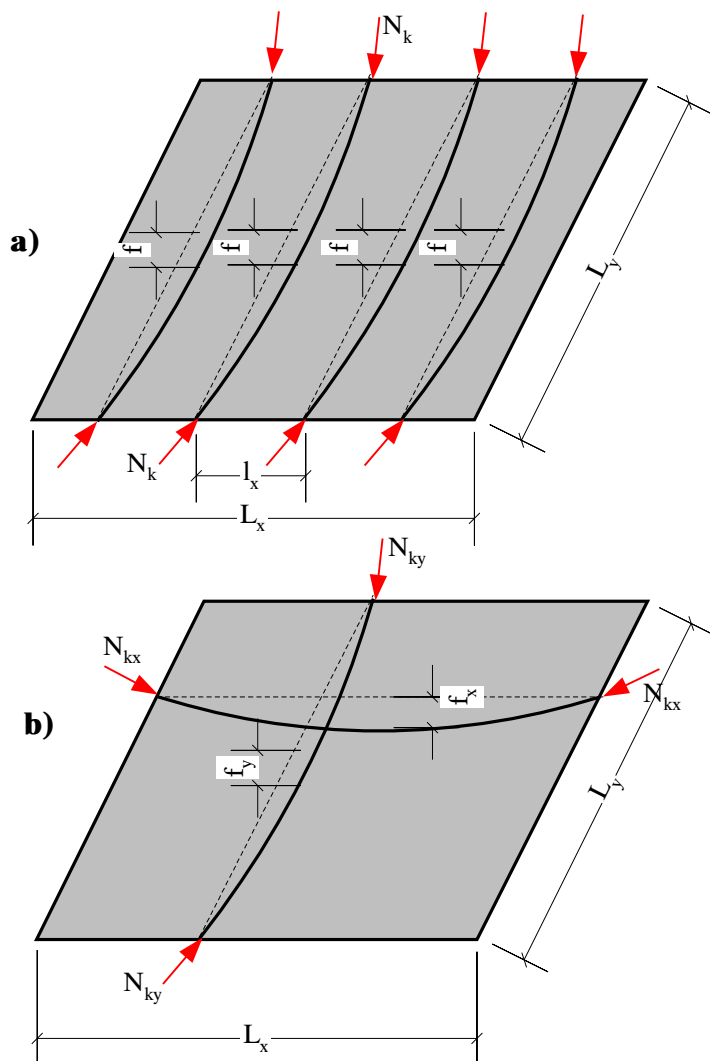
Slika 2.19 Rasprostiranje napona usled prethodnog naprezanja

Za mesto delovanja sila na krajevima nosača, do sada je redovno usvajan položaj same kotve kabla. U slučaju velikih i složenih preseka, kao što je sandučasti presek konstrukcije mosta na slici 2.19, potrebna je izvesna dužina da se trajektorije napona sa kotve 'popnu' uz rebro, i potom 'razliju' po preseku. O ovakvim detaljima se vodi računa pri usvajanju mesta **uvodjenja sila prethodnog naprezanja**.

2.2.7 Osnovni pojmovi u vezi prethodnog naprezanja ploča

Osim želje da se smanji potrebna količina betona i čelika, a i time i težina konstrukcije što ima uticaja i na racionalnost fundiranja objekta, danas je sve prisutnija potreba da se što je moguće više skrate rokovi gradjenja, makar i uz veću potrošnju materijala. U slučaju armira-

no betonskih konstrukcija zgrada, izvodjenje tavanica i pripadajućih greda je po svim navedenim kriterijumima na 'kritičnom putu'.



Slika 2.20 Dva koncepta prethodnog naprezanja ploča

Uz primenu prethodnog naprezanja, debljina tavanica može toliko da se smanji, da **vibracije** tavanica usled kretanja ljudi mogu da postanu limitirajući faktor pri određivanju minimalnih debljina. Ima slučajeva da su oscilacije tavanica morale da budu umirivane odgovarajućom 'sanacijom', uz promenu krutosti, mase ili prigušenja.

Kako je to napomenuto u delu 1, prethodno naprezanje ploča može da se vrši klasičnim kablovima **sa spojem** (uz injektiranje), ili sa posebnim užadima - kablovima **bez spoja**, slika 1.11. Pri izboru trase kablova, principijelno su moguća različita rešenja. Što se tiče momenta savijanja i deformacija, slobodno oslonjena samostalna ploča može da se prethodno napregne kablovima u jednom ili u dva pravca, slika 2.20. Razlika je u aksijalnom opterećenju u ravni ploče, u prvom slučaju nedostaje sila pritiska u poprečnom - X pravcu. Iz primera na slici 2.20a jasno je da momenti savijanja u ploči nisu jednaki proizvodu sile prethodnog naprezanja i ekscentriciteta, u poprečnom pravcu uopšte nema

sile prethodno naprezanja, ali postoje momenti zbog deformacije ploče.

Primenjujući koncept **balansiranja spoljnih opterećenja**, moguće je odrediti trasu kablova, strele \$f_x\$ odnosno \$f_y\$, razmak kablova \$l_x\$ (\$l_y\$) kao i silu prethodnog naprezanja \$N_{kx}\$ odnosno \$N_{ky}\$ u dva pravca, tako da vertikalno **ekvivalentno opterećenje** usled prethodnog naprezanja kablovima u dva pravca - 'potisak kablova' bude jednak zbiru sopstvene težine \$g\$ konstrukcije i dela dodatnog ili korisnog opterećenja \$p\$

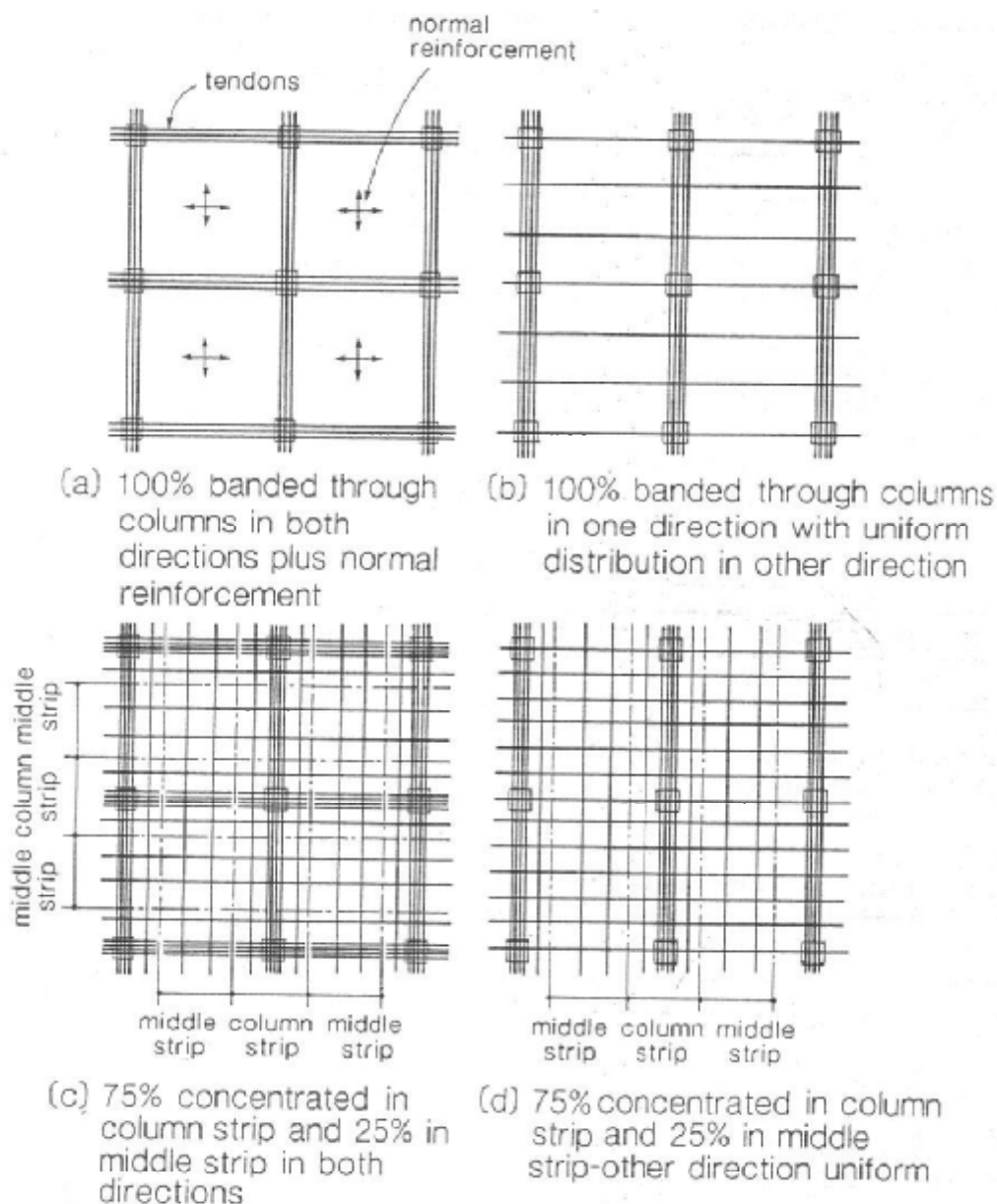
$$q_{kx} + q_{ky} = \delta N_{kx} f_x / L_x^2 l_y + \delta N_{ky} f_y / L_y^2 l_x = g + \alpha p$$

gde su:

- q_{kx} (q_{ky}) - ekvivalentna površinska opterećenja u x (y) pravcu;
- N_{kx} (N_{ky}) - sile u kablovima u x (y) pravcu;
- f_x (f_y) - strele parabolične trase kablova u x (y) pravcu;
- l_x (l_y) - razmak kablova u y (x) pravcu;

- L_x (L_y) - dužina parabole kablova u x (y) pravcu;
 α - deo korisnog opterećenja koji se 'balansira'.

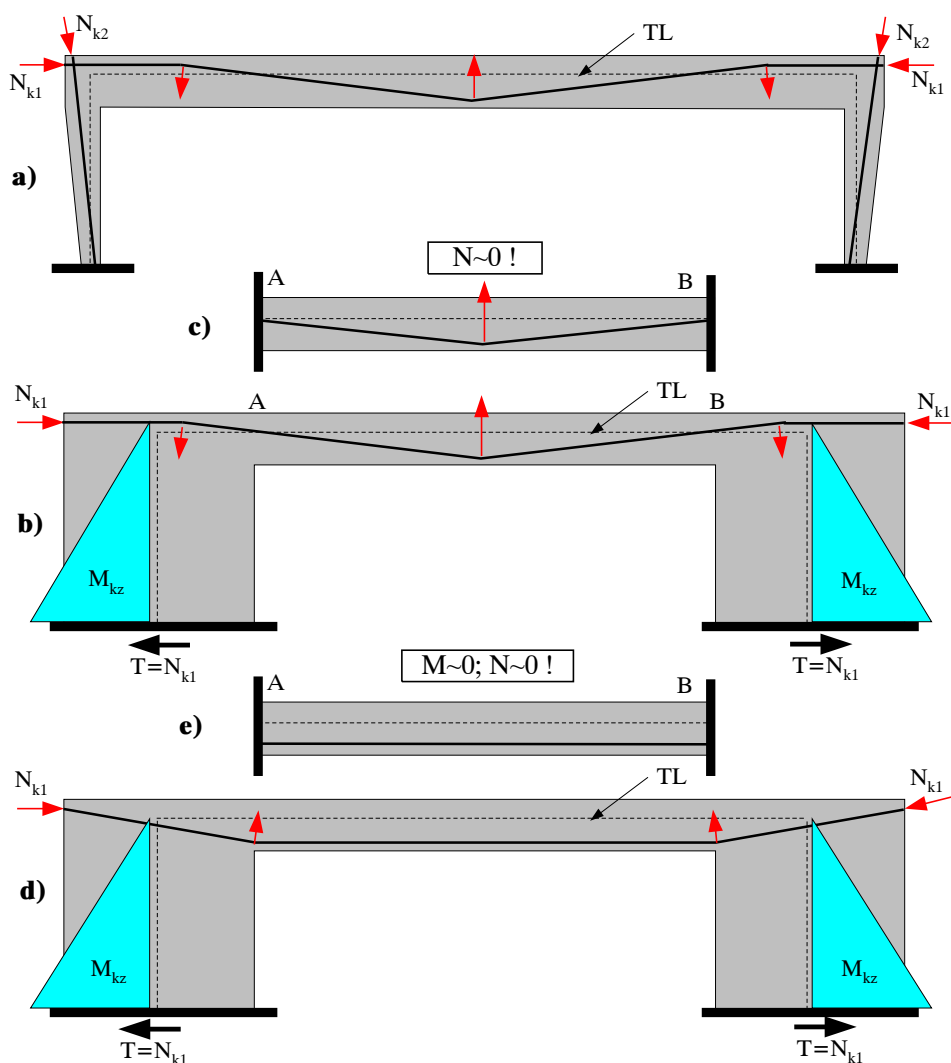
Kriterijum za izbor ukupnog opterećenja koje će se balansirati kablovima, može da bude ili deformacijski ili po parametru napona, nosivosti itd.



Slika 2.21 Različiti koncepti rasporeda kablova kontinualnih ploča direktno oslonjenih na stubove

U slučaju kontinualnih ploča preko više polja, prethodno naprezanje se obično primenjuje u okviru sistema ploča direktno oslonjenih na stubove - potisak kablova nadoknađuje nedostatak greda. Na slici 2.21 prikazane su različite varijante vodjenja kablova, sa karakterističnim progušćenjem kablova u trakama iznad stubova, videti i sliku 1.31. Osim što balansiraju stanje napona usled savijanja i deformacije, kablovi za prethodno naprezanje imaju povoljan efekat i na nosivost veze ploče i stuba na proboj. Posebna tehnologija izvodjenja, tzv. 'liftovanje ploča' prikazano je na slici 1.40 (*Sistem 'Trudbenik'*).

Kod prethodnog naprezanja ploča koje se izvodi na licu mesta, neophodno je pažljivo razmotriti eventualne otpore usled prisustva krutih zidova i jezgara, koji mogu da ometaju slobodnu deformaciju ploče u svojoj ravni, i da poremete aksijalno naprezanje ploča usled prethodnog naprezanja.



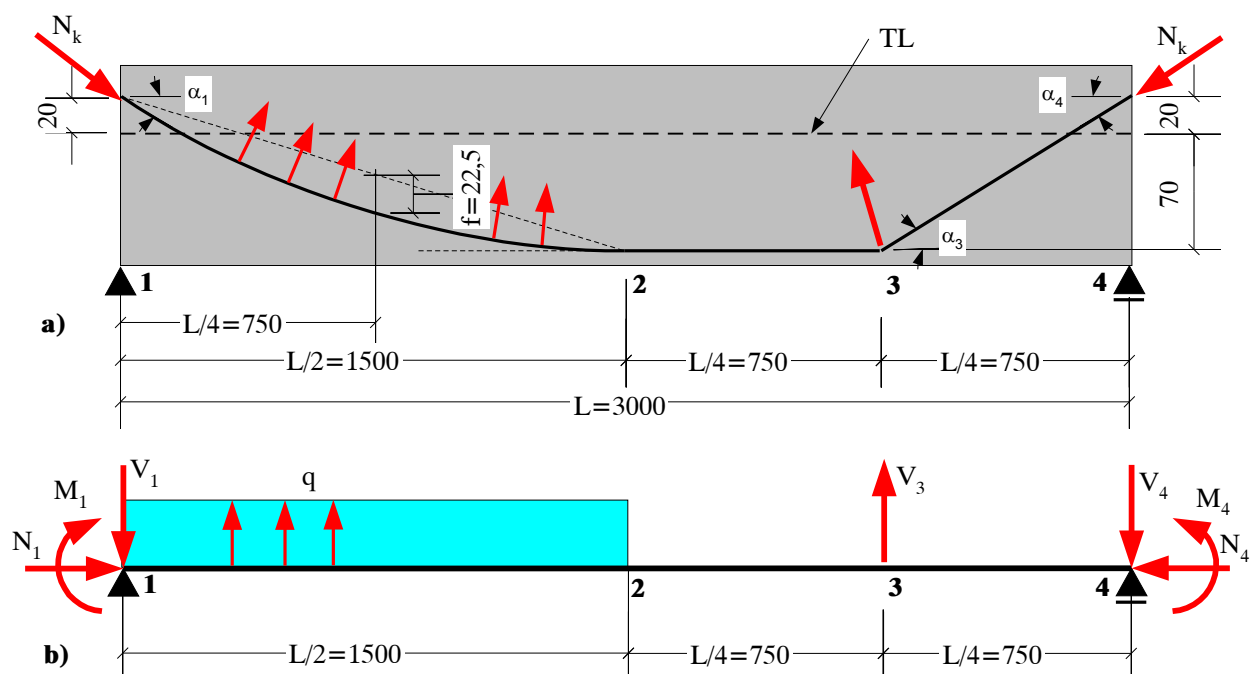
Slika 2.22 Gubitak efekata prethodnog naprezanja usled sprečenih slobodnih deformacija grede rama

Kako efekti prethodnog naprezanja rama sa slike 2.17 (ili ploče tavanice) mogu da se neželjeno umanje usled prisustva krutih zidova, na primer, prikazano je na slici 2.22. Zbog toga što kruti zidovi (ili jezgra) sprečavaju pomeranja i rotacije krajeva grede, greda rama je praktično potpuno uklještena u zidove u presecima A odnosno B - **'obostrano uklještena gređa'**, slika 2.22b. Posledica sprečenog aksijalnog skraćivanja grede je da u gredi nema normalne sile usled prethodnog naprezanja - normalna sila grede je kao horizontalna sila konzolnih zidova 'pobegla' u zidove i temelje, slika 2.22 b-c. Ukoliko je trasa kabla na čistoj dužini grede poligonalna kao na slici 2.22b-c, skretne sile kablova izazvaće momente savijanja obostrano uklještena grede, slika 2.22c. Ukoliko nema skretnih sila kao u slučaju pravolinijske trase kabla na delu $A-B$, slika 2.22d-e, u gredi neće biti ni momenata savijanja ni normalne sile usled prethodnog naprezanja, slika 2.22e. Primer je naravno karikiran, u praksi teško ostvarljiv, ali i dobar za razumevanje efekata prethodnog naprezanja.

2.3 PRIMERI

2.3.1 Primer 1

Sračunati i nacrtati ekvivalentno opterećenje usled prethodnog naprezanja za nosač sistema proste grede i datu trasu **rezultante kablova**, slika 2.22a. U preseku 2 tangenta parabole je horizontalna. Pretpostavlja se da je u pitanju 'plitka trasa' kabla, odnosno da je sila prethodnog naprezanja konstanta duž nosača i jednaka sili prethodnog naprezanja N_k . Podaci: $L=3000\text{cm}$; $N_k = 2860\text{ kN}$.



Slika 2.22 Nosač, trasa 'rezultujućeg kabla' i ekvivalentno opterećenje

- Parabolični deo 1-2 - ekvivalentno podeljeno opterećenje

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 2(70+20)/1500 = 0,120 \quad \alpha_1 = 6,843^\circ$$

$$f = (70+20)/4 = 22,5\text{ cm}$$

$$q_k = 8N_k f/L^2 = 8 \times 2860 \times 0,225/15^2 = 22,88\text{ kN/m}$$

- Presek 1- ekvivalentne koncentrisane sile

$$N_1 \cong N_k = 2860\text{ kN}$$

$$V_1 = N_k \sin\alpha_1 = 340,8\text{ kN}$$

$$M_1 = N_k e = 2860 \times 0,20 = 572\text{ kN}$$

- Presek 3 - ekvivalentna koncentrisana sila

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = 90/750 = 0,120$$

$$\sin\alpha_3/2 = 0,05968$$

$$V_3 \cong 2 N_k \sin\alpha_3/2 = 2 \times 2860 \times 0,05968 = 341,4\text{ kN}$$

- Presek 4 - ekvivalentne koncentrisane sile

$$\alpha_4 = \alpha_3$$

$$N_4 \cong N_k = 2860\text{ kN}$$

$$T_4 = N_k \sin\alpha_4 = 341,4\text{ kN}$$

$$M_4 = N_k e = 2860 \times 0,20 = 572,0 \text{ kN}$$

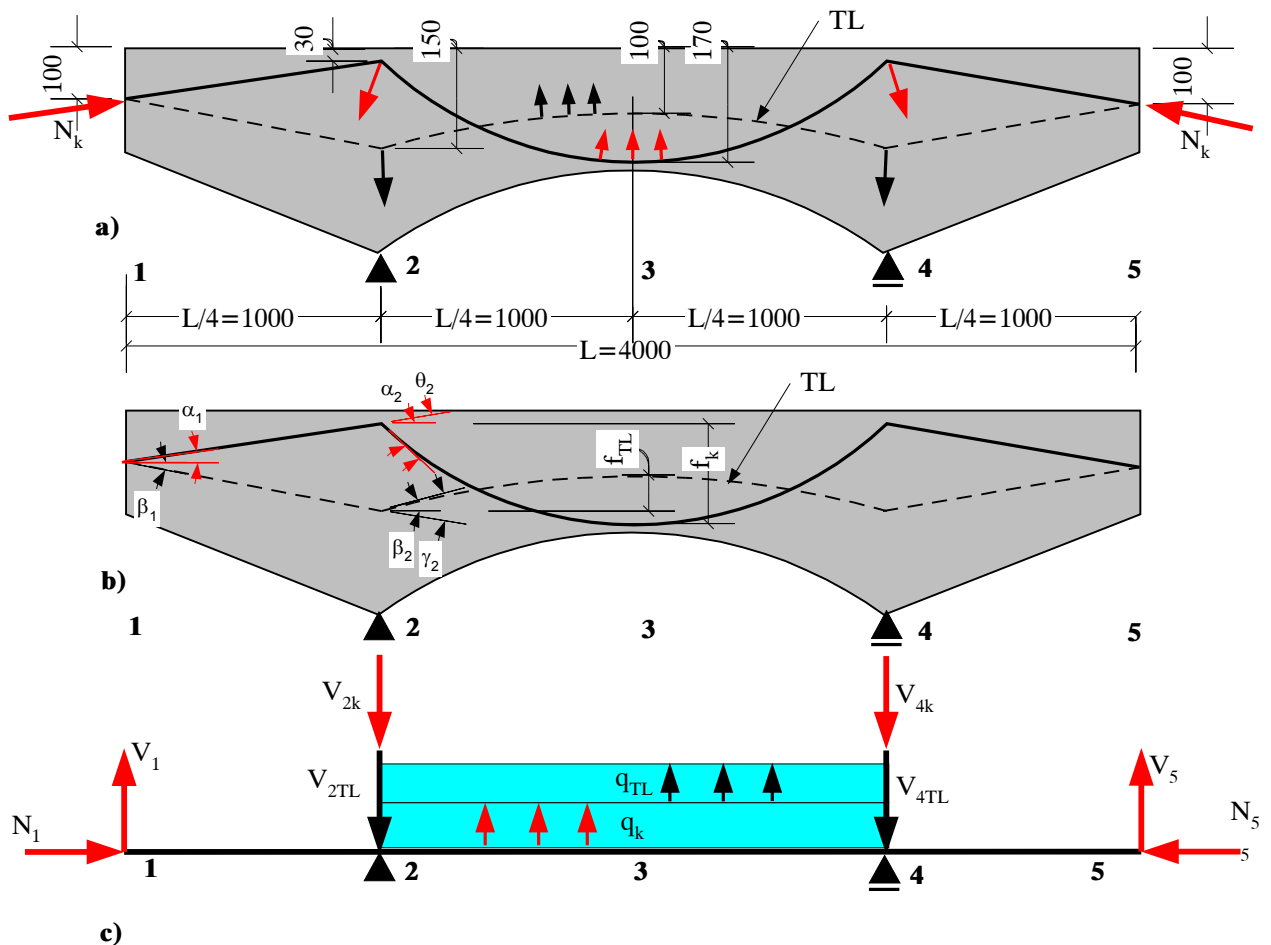
Ekvivalentno opterećenje prikazano je na slici 2.22b.

Kontrola ravnoteže vertikalnih opterećenja

$$\Sigma y = 22,88 \times 15,0 + 341,4 - 340,8 - 341,4 = 2,4 \text{ kN} \cong 0$$

2.3.2 Primer 2

Sračunati i nacrtati ekvivalentno opterećenje usled prethodnog napreznja za nosač sistema proste grede, i datu trasu rezultante kablova odnosno težišne linije, slika 2.23a. Ekvivalentno opterećenje prikazati na 'ispravljenoj' težišnoj liniji nosača. Sračunati vrednost momenta savijanja u sredini nosača i uporediti sa 'direktnim' rešnjem $M_k = N_k e$. Pretpostavlja se da je u pitanju 'plitka trasa' kablova, odnosno da je sila prethodnog napreznja konstanta duž nosača i jednaka sili prethodnog napreznja N_k . Podaci: $N_k = 1000$ kN. Sve mere date su u cm.



Slika 2.23 Nosač, trasa 'rezultujućeg kablova' i ekvivalentno opterećenje

- Parabolična trasa kablova

$$f_k = 170 - 30 = 140 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 70/1000 = 0,070 \quad \alpha_1 = 4,004^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 2 \times 140/1000 = 0,280 \quad \alpha_2 = 15,642^\circ$$

$$\theta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4,004 + 15,642 = 19,646^\circ$$

- Parabolična težišna linija

$$f_{TL} = 150 - 100 = 50 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 50/1000 = 0,050 \quad \beta_1 = 2,862^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = 2 \times 50/1000 = 0,100 \quad \beta_2 = 5,711^\circ$$

$$\gamma_2 = \beta_1 + \beta_2 = 2,862 + 5,711 = 8,573^\circ$$

- Presek 1 - ekvivalentne koncentrisane sile

$$N_1 = N_k \cos(\alpha_1 + \beta_1) \cong N_k = 1000 \text{ kN}$$

$$V_1 = N_k \sin(\alpha_1 + \beta_1) = 1000 \sin(4,004 + 2,862) = 119,5 \text{ kN}$$

- Presek 2 - ekvivalentna koncentrisana sila

Komponenta usled preloma trase kabla

$$V_{2k} = 2 \times 1000 \sin\theta_2/2 = 2 \times 1000 \times \sin(19,646/2) = 341,2 \text{ kN}$$

Komponenta usled preloma težišne linije

$$V_{2TK} = 2 \times 1000 \sin\gamma_2/2 = 2 \times 1000 \times \sin(8,573/2) = 149,5 \text{ kN}$$

Ukupno

$$V_2 = V_{2k} + V_{2TL} = 341,2 + 149,5 = 490,7 \text{ kN}$$

- Polje 2-4 - ekvivalentno podeljeno opterećenje

Komponenta usled krivine kabla

$$q_k = 8N_k f_k / (L/2)^2 = 8 \times 1000 \times 1,40 / 20^2 = 28 \text{ kN/m}$$

Komponenta usled krivine težišne linije

$$q_{TL} = 8N_k f_{TL} / (L/2)^2 = 8 \times 1000 \times 0,50 / 20^2 = 10 \text{ kN/m}$$

Ukupno

$$q = q_k + q_{TL} = 28 + 10 = 38 \text{ kN/m}$$

Ekvivalentno opterećenje prikazano je na slici 2.23c.

- Moment savijanja u sredini raspona - ekvivalentno opterećenja

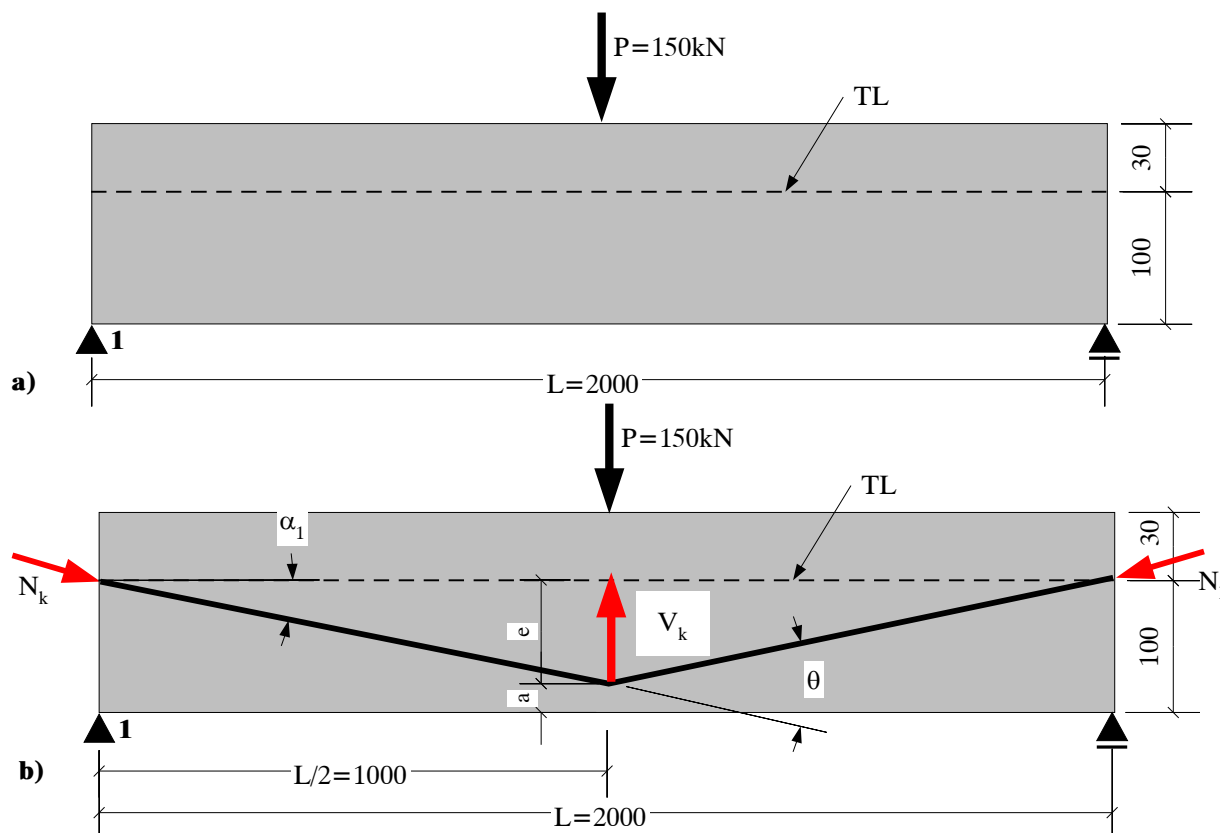
$$M_3 = -119,5 \times 10,0 + 38,0 \times 20^2 / 8 = 705 \text{ kNm}$$

- Moment savijanja u sredini raspona - direktan proračun

$$M_3 = N_k e = 1000 \times (1,7 - 1,0) = 700 \text{ kNm}$$

2.3.3 Primer 3

Za prostu gredu opterećenu koncentrisanom silom P u sredini raspona, slika 2.24, odrediti trasu rezultante, kao i potrebnu veličinu sile prethodnog naprezanja uz uslov da ugib svih preseka nosača usled istovremenog dejstva svih opterećenja bude jednak nuli. Sve dimenzije date su u cm.



Slika 2.24 Balansiranje ugiba konstrukcije

- Trasa rezultante

Komentar: Da bi ugib u svim presecima bio jednak nuli, ekvivalentno opterećenje usled prethodnog naprezanja mora da bude istog tipa i intenziteta kao i spoljno opterećenje, kako bi se poništili - 'izbalansirali' momenti savijanja, odnosno krivine i ugibi nosača u svim presecima. Trasa rezultante dobija se 'preslikavanjem' dijagrama momenata savijanja usled spoljnog opterećenja koje treba 'izbalansirati' - u ovom slučaju trougaonog dijagrama momenata usled dejstva sile P . Rezultujuće stanje naprezanja nosača je centrični pritisak. Usvojena trasa rezultante prethodnog naprezanja prikazana je na slici 2.24b.

- Potrebna sila prethodnog naprezanja - 1. varijanta rešenja

Uslov balansiranja opterećenja

$$V_k = P = 150 \text{ kN}$$

Skretna koncentrisana sila V_k

Pretpostavljeno: $a = 15$ cm

$$e = 100 - 15 = 85 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = e/(L/2) = 85/1000 = 0,085$$

$$\alpha_1 = 4,858^\circ$$

$$\theta = 2\alpha_1 = 2 \times 4,858 = 9,716^\circ$$

$$V_k = 2N_k \sin\theta/2 = 150 \text{ kN}$$

$$N_k = 150/2\sin\theta/2 = 150/2 \times \sin 4,858 = 885,6 \text{ kN}$$

- Potrebna sila prethodnog naprezanja - 2. varijanta rešenja

Uslov jednakosti momenta savijanja u sredini raspona - tada su svi momenti duž nosača izjednačeni

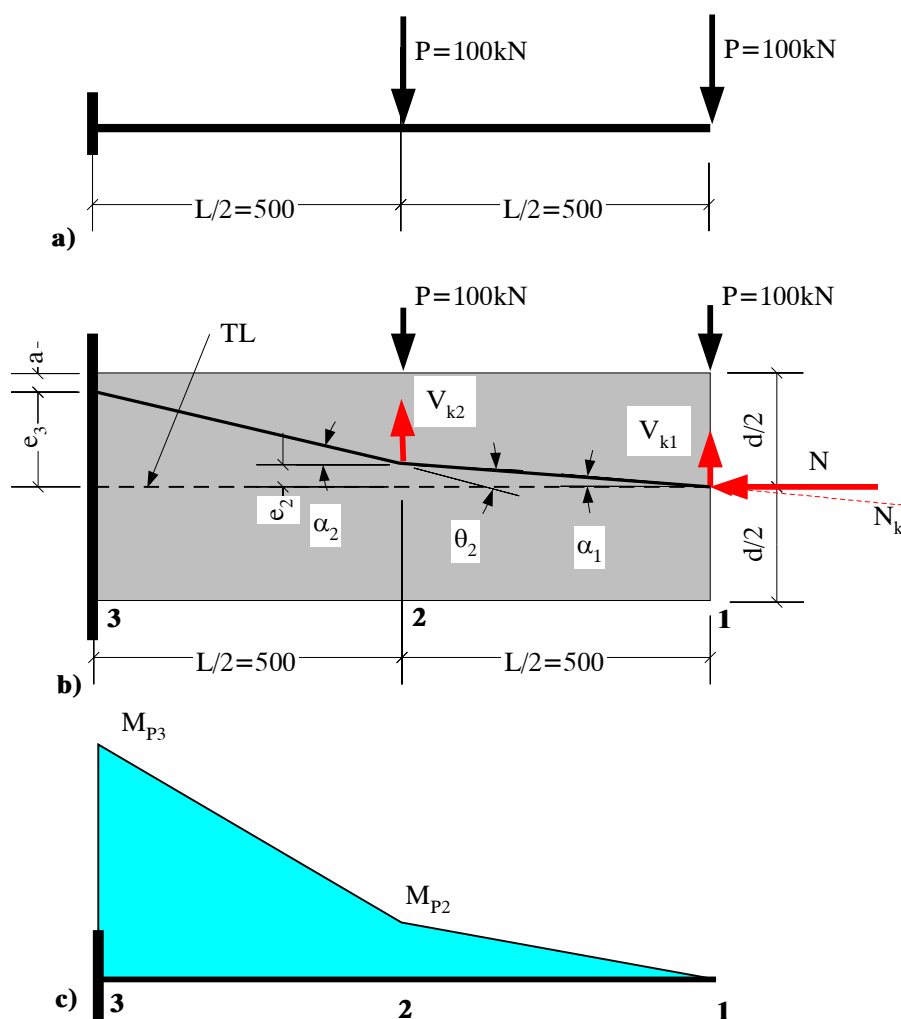
$$PL/4 = N_k e$$

$$N_k = PL/4e = 150 \times 20/4 \times 0,85 = 882,3 \text{ kN}$$

2.3.4 Primer 4

Za konzolni nosač pravougaonog poprečnog preseka opterećenog sa dve koncentrisane sile, slika 2.25a, odrediti oblik trase rezultante sila prethodnog napreznja tako da rezultujuće stanje napona u nosaču usled svih opterećenja bude centrični pritisak.

Podaci: $P = 100 \text{ kN}$; $N_k = 1000 \text{ kN}$.



Slika 2.25 Balansiranje napona konstrukcije

- Oblik trase rezultante prethodnog napreznja

Komentar: Da bi rezultujuće stanje napona bilo centrični pritisak, ekvivalentno opterećenje usled prethodnog napreznja mora da bude istog tipa i intenziteta kao i spoljno opterećenje, kako bi se poništili - 'izbalansirali' momenti savijanja u svim presecima. Trasa rezultante može da se dobija 'preslikavanjem' dijagrama momenta savijanja usled spoljnog opterećenja, slika 2.25c. Usvojena trasa rezultante prethodnog napreznja prikazana je na slici 2.25b.

- Momenti savijanja usled spoljašnjeg opterećenja

Presek 1

$$M_{P1} = 0$$

Presek 2

$$M_{P2} = 100 \times 5 = 500 \text{ kNm}$$

Presek 3

$$M_{P_3} = 100 \times 10 + 100 \times 5 = 1500 \text{ kNm}$$

- Potreban ekscentricitet trase rezultante

Presek 1

$$e = 0$$

Presek 2

$$e = M_{P_2} / N_k = 500/1000 = 0,5 \text{ m}$$

Presek 3

$$e = M_{P_3} / N_3 = 1500/1000 = 1,5 \text{ m}$$

Oblik poligonalne trase kablova prikazan je na slici 2.25b. Sa sračunatim ekscentricitetima i zadatom silom prethodnog naprezanja, momenti usled prethodnog naprezanja jednaki su spoljašnjim momentima, ali sa obrnutim znakom.

Druga varijanta rešenja je da se, polazeći sa desnog kraja - preseka 1, odredi potrebna veličina skretnih uglova α , tako da koncentrisane skretne sile usled prethodnog naprezanja V_k budu jednake spoljašnjim silama P u odgovarajućim presecima.

2.3.5 Primer 5

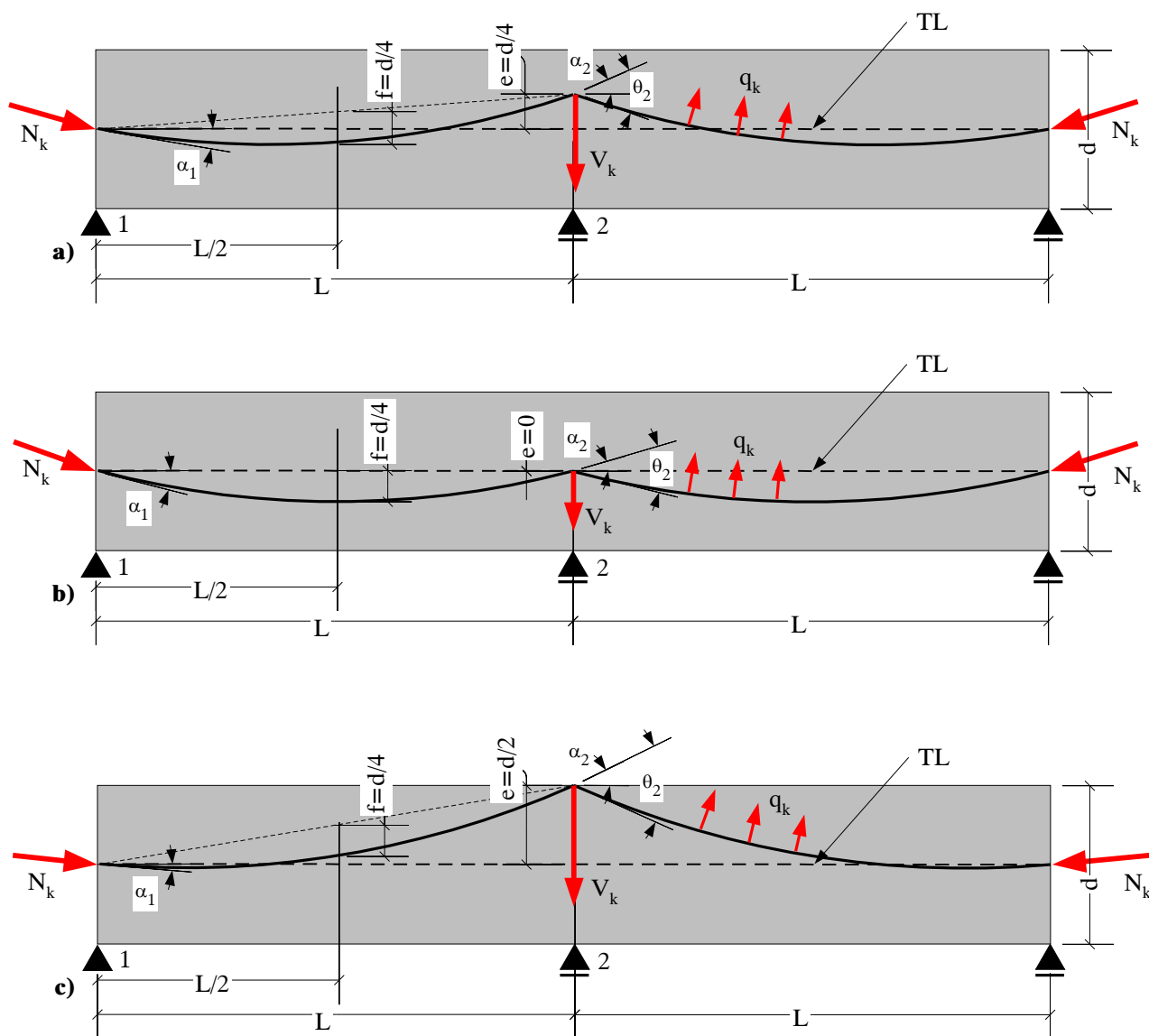
Za tri varijante trase rezultante sila prethodnog naprezanja kontinualnog nosača preko dva polja, slike 2.26a-c:

- sračunati vrednost podeljenog skretnog opterećenja q_k kao i koncentrisane skretne sile V_k iznad srednjeg oslonca;

- sračunati reakciju R_2 srednjeg oslonca usled dejstva prethodnog naprezanja;

- ukoliko prethodno naprezanje izaziva 'čupanje' srednjeg oslonca (nosač teži da se odigne), odrediti minimalnu potrebnu sopstvenu težinu konstrukcije g (kN/m), tako da ne dodje do odizanja u fazi prethodnog naprezanja;

Podaci: $L = 1500$ cm; $d = 160$ cm; $N_k = 1000$ kN.



Slika 2.26 Linearne transformacije trase rezultante kontinualnog nosača

Treba uočiti da su u sva tri slučaja, strele paraboličnih trasa rezultante identične, $f = d/4$. Razlikuje se samo ekscentricitet iznad srednjeg oslonca e , tako da ovaj primer ilustruje 'linearne transformacije' trasa kablova.

- Skretno podeljeno opterećenje u polju q_k

Nosač 2.26a

$$f = d/4 = 160/4 = 40 \text{ cm}$$

$$e = d/4 = 160/4 = 40 \text{ cm}$$

$$q_k = 8N_k f/L^2 = 8 \times 1000 \times 0.40/15^2 = 14,22 \text{ kN/m}$$

S obzirom da su strele trase f , kao i sile prethodnog naprezanja N_k u sva tri slučaja iste, tada su i skretna podeljena opterećenja q_k jednaka u sva tri primera.

Nosač 2.26b

$$q_k = 8N_k f/L^2 = 14,22 \text{ kN/m}$$

Nosač 2.26c

$$q_k = 8N_k f/L^2 = 14,22 \text{ kN/m}$$

- Koncentrisana skretna sila V_k iznad oslonca

Nosač 2.26a

$$f = 40 \text{ cm}$$

$$e = 40 \text{ cm}$$

$$\text{tg}\alpha_2 = (2f + e/2) / (L/2) = (2 \times 0,40 + 0,40/2) / (15/2) = 0,13333$$

$$\alpha_2 = 7,594^\circ$$

$$\theta_2 = 2 \alpha_2 = 15,188^\circ$$

$$V_k = 2N_k \sin\theta_2/2 = 2 \times 1000 \times \sin 7,594 = 264,3 \text{ kN}$$

Nosač 2.26b

$$f = 40 \text{ cm}$$

$$e = 0$$

$$\text{tg}\alpha_2 = (2f + e/2) / (L/2) = (2 \times 0,40) / (15/2) = 0,1066$$

$$\alpha_2 = 6,088^\circ$$

$$\theta_2 = 2 \alpha_2 = 12,176^\circ$$

$$V_k = 2N_k \sin\theta_2/2 = 2 \times 1000 \times \sin 6,088 = 212,1 \text{ kN}$$

Nosač 2.26c

$$f = 40 \text{ cm}$$

$$e = d/2 = 160/2 = 80 \text{ cm}$$

$$\text{tg}\alpha_2 = (2f + e/2) / (L/2) = (2 \times 0,40 + 0,80/2) / (15/2) = 0,1600$$

$$\alpha_2 = 9,090^\circ$$

$$\theta_2 = 2 \alpha_2 = 18,180^\circ$$

$$V_k = 2N_k \sin\theta_2/2 = 2 \times 1000 \times \sin 9,090 = 315,9 \text{ kN}$$

- Reakcija srednjeg oslonca R_2 usled prethodnog naprezanja (+ pritisak na oslonac)

Komentar: Zbog potpune simetrije, presek nad osloncem nema rotacija, sistem može da se analizira kao dve grede raspona L , uklještene u zajedničkom preseku iznad srednjeg oslonca. Reakcija u uklještenju sa jedne strane iznosi $Q = (5/8)q_k L$

Nosač 2.26a

$$R_2 = -2 \times (5/8)q_k L + V_k = -2 \times (5/8) \times 14,22 \times 15 + 264,3 = -266,6 + 264,3 = 2,3 \text{ kN} \cong 0$$

Trasa kablova je 'konkordanta', nema reakcija oslonaca usled prethodnog naprezanja.

Nosač 2.26b

$$R_2 = -2 \times (5/8)q_k L + V_k = -266,6 + 212,1 = -54,5 \text{ kN (}'\text{čupanje}' \text{ oslonca)}$$

Nosač 2.26c

$$R_2 = -2 \times (5/8)q_k L + V_k = -266,6 + 315,9 = 49,3 \text{ kN (pritisak na oslonac)}$$

- Osiguranje od odizanja nosača nad srednjim osloncem u fazi prethodnog naprezanja

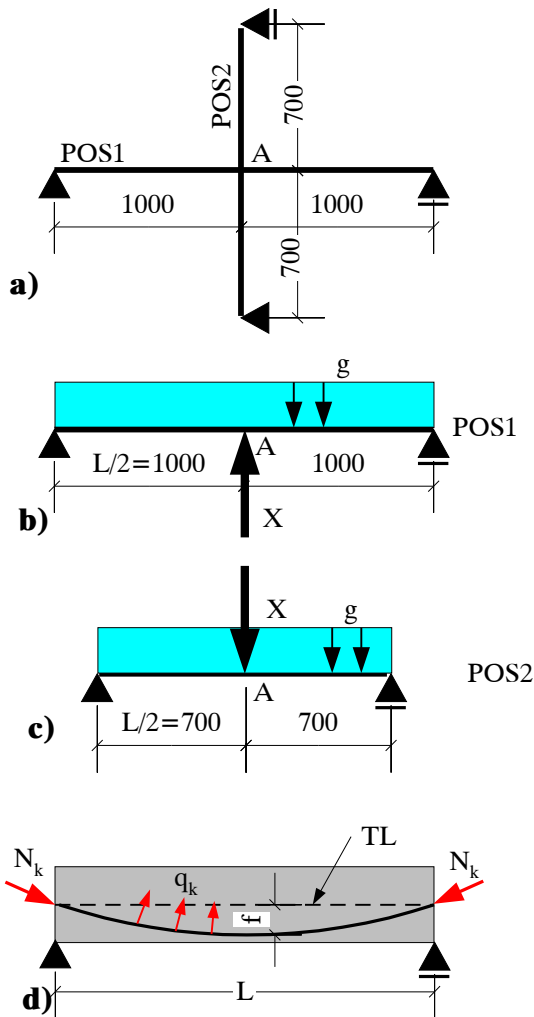
Komentar: S obzirom da je podeljeno skretno opterećenje q_k jednako u sva tri primera, razlike u veličini reakcije nad srednjim osloncem nastaju samo usled razlike u skretnim silama nad srednjim osloncem V_k . U slučaju trase na slici 2.26b, sa najmanjim ekscentricitetom e iznad srednjeg oslonca, skretni ugao θ_2 je najmanji, pa je i sila V_k najmanja, što kao rezultat daje 'čupanje' oslonca - 'potisak' u polju je nadvladao skretnu silu nad osloncem. Da se realni nosač ne bi stvarno odigao, reakcija nad srednjim osloncem usled sopstvene težine g treba da je najmanje jednaka reakciji 'čupanja' usled prethodnog naprezanja.

$$R_g = R_2 = 54,5 \text{ kN}$$

$$R_g = 2 \times (5/8)gL = 2 \times (5/8) \times g \times 15 = 54,5 \text{ kN}$$
$$\min g = 2,9 \text{ kN/m}$$

2.3.6 Primer 6

Za roštilj betonskih greda identičnog pravougaonog poprečnog preseka $b/d = 40/150$ cm, koje se ukrštaju u tački A , slika 2.27a, odrediti odgovarajuću trasu rezultanti sila prethodnog naprezanja kao i veličinu sila prethodnog naprezanja, tako da u fazi prethodnog naprezanja ugib tačke A bude jednak nuli.



Slika 2.27 Balansiranje ugiba sredine roštilja

grede usvoji odgovarajuća parabolična trasa kablova, tako da vertikalno skretno podeljeno opterećenje q_k svake od greda, bude jednako težini grede po dužnom metru, $q_k = g$.

Greda POS1

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$d = 150 \text{ cm}$$

$$\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$g_1 = 0,40 \times 1,50 \times 25 = 15 \text{ kN/m}$$

$$L_1 = 20 \text{ m}$$

Usvojeno:

$$f_1 = d/2 - a = 150/2 - 10 = 65 \text{ cm, slika 2.27d}$$

Komentar: Postavljeni uslov po deformacijama može da se zadovolji različitim dispozicijama trasa kablova: utezanjem samo nosača POS1; utezanjem samo nosača POS2; istovremenim utezanjem oba nosača.

Zbog dvoosne simetrije, konstrukcija roštilja greda je jednom statički neodređena, vertikalna sila X koja povezuje grede i usaglašava vertikalna pomeranja je nepoznata, slike 2.27b-c. Zbog iste krutosti na savijanje (EI) poprečnog preseka, kao i istog opterećenja sopstvenom težinom, kraća i na vertikalne ugibe kruća greda POS2 (ima manji raspon) 'pridržava' dužu gredu POS1 za uticaje sopstvene težine - nepoznata sila X u ovom slučaju ima smer kao na slici 2.27b-c.

U slučaju prethodnog naprezanja samo jedne grede, problem je statički neodređen za uticaje samo prethodnog naprezanja, ali to je svakako moguće rešenje. Ako se traži brzo rešenje, jednostavnije je usvojiti koncept **istovremenog prethodnog naprezanja** obeju greda. Traži se brzo rešenje!

Da bi ugib zajedničke tačke greda A pod dejstvom sopstvene težine i prethodnog naprezanja bio jednak nuli, dovoljno je da se za obe

Uslov balansiranja opterećenja

$$q_{k1} = 8 N_{k1} f_1 / L_1^2 = g_1$$

$$N_{k1} = g_1 L_1^2 / 8 f_1 = 15 \times 20^2 / (8 \times 0,65) = 1153,8 \text{ kN}$$

Rešenje za gredu POS1:

$$f_1 = 65 \text{ cm}$$

$$N_{k1} = 1153,8 \text{ kN}$$

Greda POS2

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$d = 150 \text{ cm}$$

$$g_2 = 15 \text{ kN/m}$$

$$L_2 = 14 \text{ m}$$

Zbog ukrštanja kablova u preseku A, usvoja se plića trasa kablova:

$$f_2 = f_1 - b = 65/2 - 10 = 55 \text{ cm}$$

Uslov balansiranja opterećenja

$$q_{k2} = 8 N_{k2} f_2 / L_2^2 = g_2$$

$$N_{k2} = g_2 L_2^2 / 8 f_2 = 15 \times 14^2 / (8 \times 0,55) = 668,2 \text{ kN}$$

Rešenje za gredu POS2:

$$f_2 = 55 \text{ cm}$$

$$N_{k2} = 668,2 \text{ kN}$$