

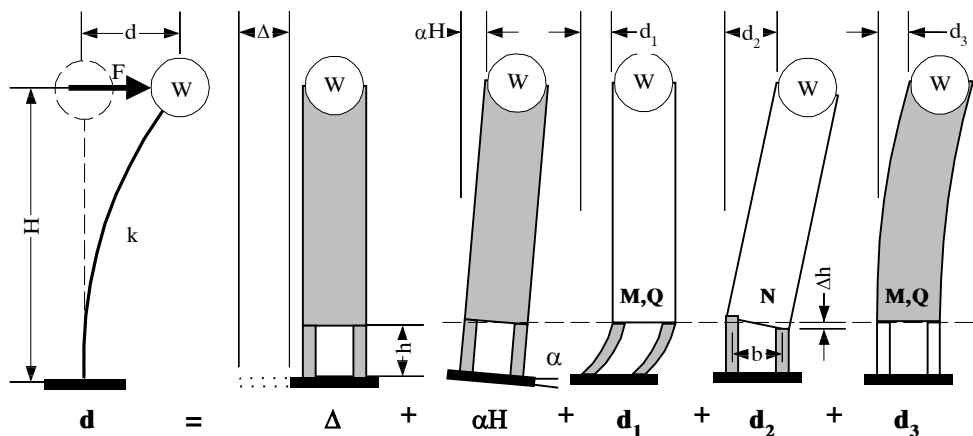
2. PONAŠANJE PRI ZEMLJOTRESU LINEARNO ELASTIČNIH SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

UVOD

Poznavanje ponašanja konstrukcije, uz pretpostavku njenog elastičnog *odgovora na kretanje tla* pri zemljotresu je osnovni podatak za ocenu efekata zemljotresa na konstrukcije. Realne konstrukcije najčešće imaju više stepeni slobode, ali je *prvi ton oscilacija* najčešće dominantan, i predstavlja osnovu većine *propisa* u ovoj oblasti. Nakon definisanja osnovnih pojmova iz dinamike konstrukcija, prikazan je odgovor dva elastična sistema sa jednim stepenom slobode, na dva karakteristična zapisa ubrzanja tla - akceleroograma. U nastavku, rešenje se generalizuje na ceo opseg sopstvenih perioda realnih građevinskih konstrukcija, formulisanjem *elastičnih spektara ubrzanja i pomeranja*.

2.1 REKAPITULACIJA OSNOVNIH POJMOVA IZ DINAMIKE KONSTRUKCIJA

Za opisivanje kretanja jedne mase konstrukcije u prostoru u opštem slučaju potrebno je šest komponenti pomeranja, tri *translacije* i tri *rotacije mase*. Zavisno od *dispozicije konstrukcije, rasporeda masa* kao i pravca dejstva *dinamičke pobude - kretanja tla*, broj *nezavisnih komponenti* pomeranja koji je dovoljan da se opiše kretanje se smanjuje, i naziva se *broj stepeni slobode*. U slučaju dominantnog horizontalnog kretanja jedne mase u ravni, govori se o sistemu sa *jednim stepenom slobode* - nepoznatim horizontalnim pomeranjem mase $d(t)$ u toku vremena, slika 2.1.



Slika 2.1 Komponente pomeranja sistema sa jednim stepenom slobode

Pri dejstvu spoljne *statičke* sile F , horizontalno pomeranje d mase u opštem slučaju posledica je više komponenti pomeranja: pomeranja δ usled klizanja temelja, pomeranja αH usled rotacije temelja za ugao α , pomeranje d_1 i d_3 usled deformacija savijanja i smicanja i pomeranja d_2 usled aksijalnog opterećenja pojedinih delova konstrukcije, slika 2.1

$$d = \Delta + \alpha H + d_1 + d_2 + d_3 = \delta F = F/k \quad (2.1)$$

Ukupno pomeranje δ usled jedinične sile $F=1$, naziva se *fleksibilnost konstrukcije* ("matrica fleksibilnosti"), dok se inverzna vrednost $k=1/\delta$ naziva *krutost konstrukcije na pomeranje* ("matrica krutosti"). U većini slučajeva, fleksibilnost odnosno krutost konstruk-

cije mogu dovoljno tačno da se odrede samo iz deformacija savijanja, na osnovu *krutosti EI preseka na savijanje*.

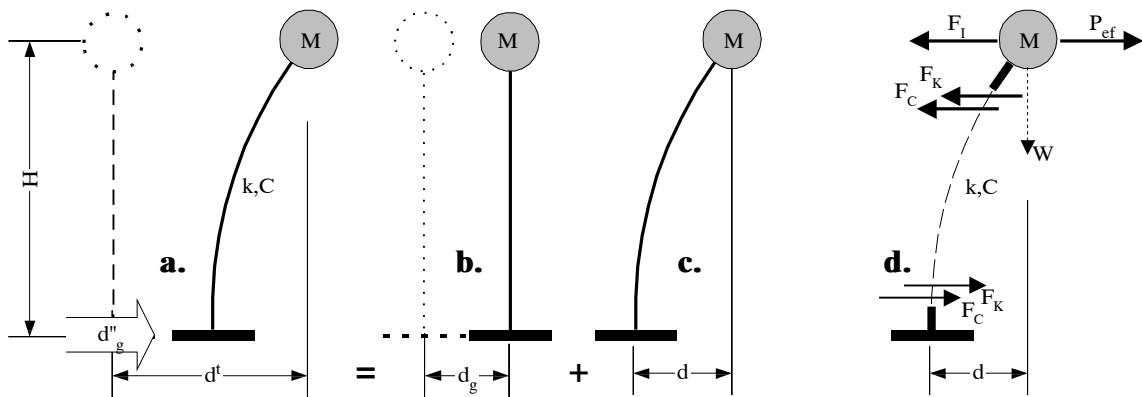
Pri kretanju tla sa značajnijim ubrzanjem $d''_g(t)$, problem postaje *dinamički*, jer se u konstrukciji javljaju i *inercijalne sile*. Osnovne dinamičke karakteristike sistema su *period sopstvenih oscilacija* sistema

$$T=2\pi\sqrt{(m/k)} = 2\pi\sqrt{(m\delta)} \quad (2.2)$$

odnosno *kružna frekvencija* sopstvenih oscilacija

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{(k/m)} \quad (2.3)$$

gde je m - masa sistema.



Slika 2.2 Osnovni parametri dinamičkog modela

Ukupno pomeranje d' mase u odnosu na početni položaj u prostoru jednako je zbiru pomeranja d_g konstrukcije kao *krutog tela* zajedno sa tлом, slika 2.1.b, i *relativnog pomeranja* d mase u odnosu na temelj, slika 2.1.c. Totalno, *apsolutno ubrzanje* mase u prostoru iznosi $d''' = d''_g + d''$.

Odgovor konstrukcije na kretanje tla sa promenljivim ubrzanjem $d''_g(t)$ može da se odredi na osnovu rešenja problema *relativnog kretanja* mase konstrukcije sa *nepomerljivim temeljom*, opterećene *efektivnom dinamičkom silom* u centru mase $P_{ef} = -md''_g$ slika 2.1.d.

U svakom trenutku vremena t , rezultanta horizontalnog "spoljnog opterećenja" - zbir *efektivne* P_{ef} i *inercijalne sile* $F_I = md''_g$ usled relativnog ubrzanja, u ravnoteži je sa *unutrašnjim silama* konstrukcije, *otporu* elastične konstrukcije pomeranjima - $F_K = kd$, i *sili prigušenja* kretanja $F_C = cd'$, gde je c - *viskozno prigušenje* a d' - *relativna brzina* kretanja, slika 2.1.d

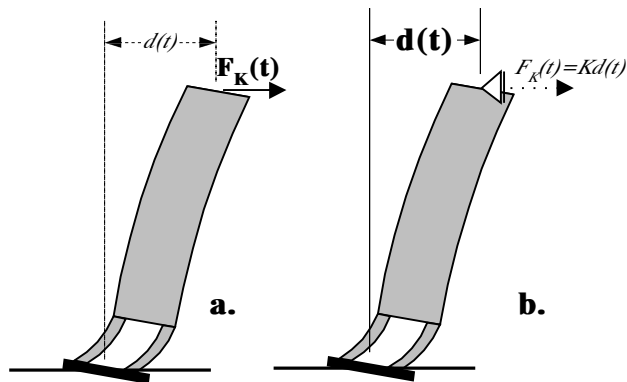
$$P_{ef} - F_I - F_K - F_C = 0 \quad \text{odnosno} \quad (2.4)$$

$$md''_g + cd' + kd = -md''_g \quad (2.5)$$

Podeljena sa masom m , jednačina (2.5) glasi

$$d'' + 2\xi\omega d' + \omega^2 d = -d''_g \quad (2.6)$$

gde je $\xi = c/2m\omega$ *koeficijent prigušenja*, a $A(t) = \omega^2 d$ "*pseudo ubrzanje*" mase. Za veličine koeficijenta prigušenja $\xi < 0,10$, pseudo ubrzanje, koje određuje iznos naprezanja konstrukcije praktično je jednako totalnom ubrzanju, koje utiče kako na ljude, tako i na opremu objekta, $(d''_g + d'') \approx \omega^2 d$.



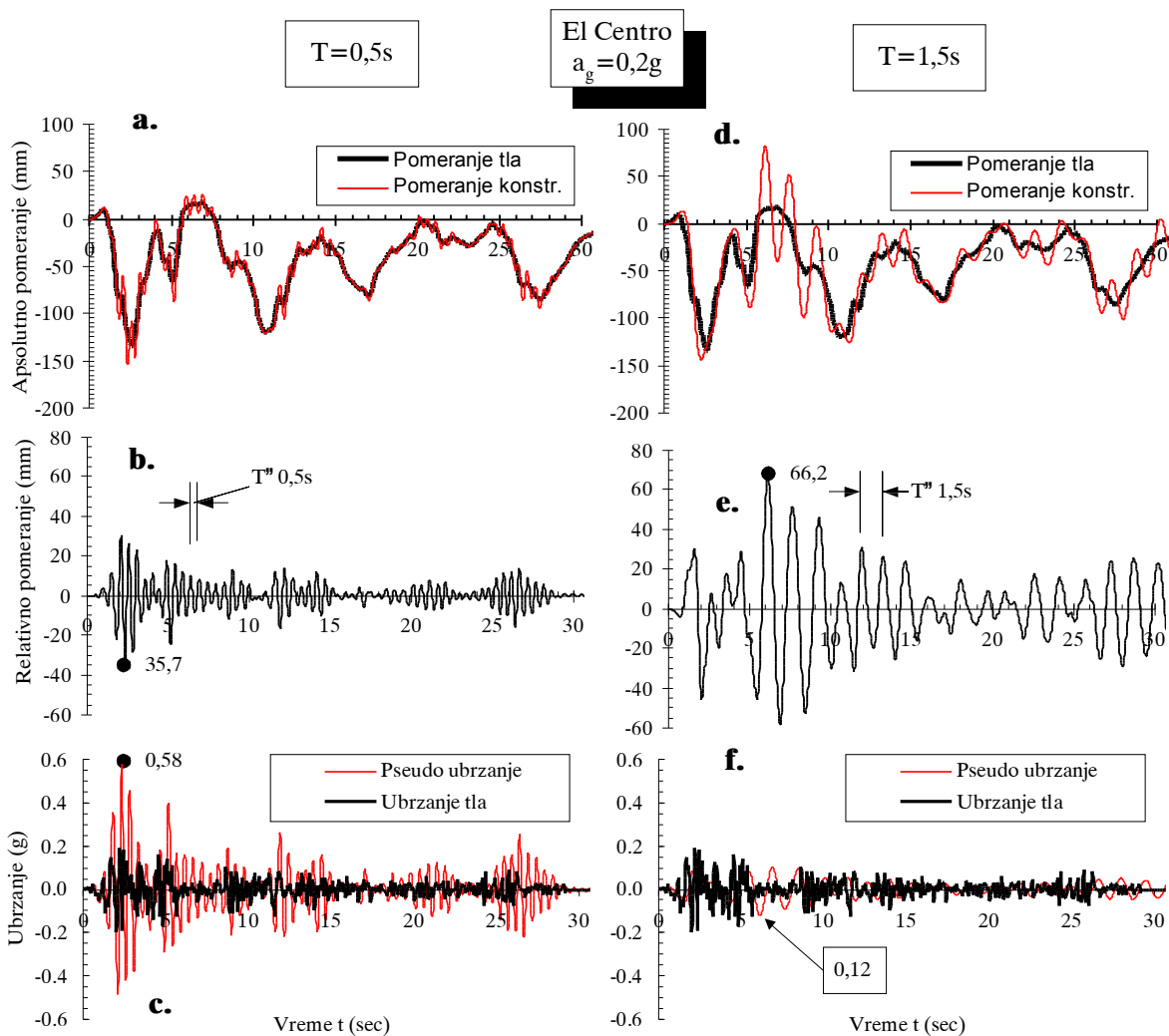
Slika 2.3 Interpretacija rezultata analize

se sve ordinate akcelerograma multiplikuju odnosom $a_g / \max d''_g(t)$, tako da maksimalno računsko ubrzanje tla bude jednako željenoj vrednosti a_g .

Rezultati analize se tradicionalno prikazuju u obliku sile elastičnog otpora konstrukcije $F_k(t) = mA(t) = m\omega^2 d(t)$ - koncept "zemljotresa kao spoljnog opterećenja", slika 2.3.a. Danas je trend da se efekti zemljotresa interpretiraju kao "prinudno relativno pomeranje" konstrukcije, dok je sila $F(t) = kd(t)$ u opštem slučaju funkcija krutosti k konstrukcije, slika 2.3.b.

U slučaju kretanja tla, rešenje jednačine (2.6) može da se odredi u obliku *Duhamel-ovog integrala*, ili se primenjuju *numeričke metode*, kao što je *Njumarkova metoda* sa konstantnim ubrzanjem [3], [4]. Ulazni podatak je promena ubrzanja tla u toku vremena $d''_g(t)$, definisana zapisima ubrzanja tla - akcelerogramima, slika 1.3.

Često se umesto registrovanih vrednosti ubrzanja koriste *skalirane vrednosti ubrzanja* tla. Oblik zapisa se zadržava, ali



Slika 2.4 Odgovor elastične konstrukcije na zapis El Centro

Primer 2.1.....

Njumarkovom metodom odrediti odgovor elastične konstrukcije sa jednim stepenom slobode na uticaj zapisa El Centro prema slici 1.3.a, skaliranog na maksimalno ubrzanje tla $a_g=0,2g$. Analizirati dva slučaja konstrukcija, sa periodom sopstvenih oscilacija $T=0,5s$ odnosno $T=1,5s$. Za vrednost koeficijenta prigušenja usvojiti $\xi=5\%$.

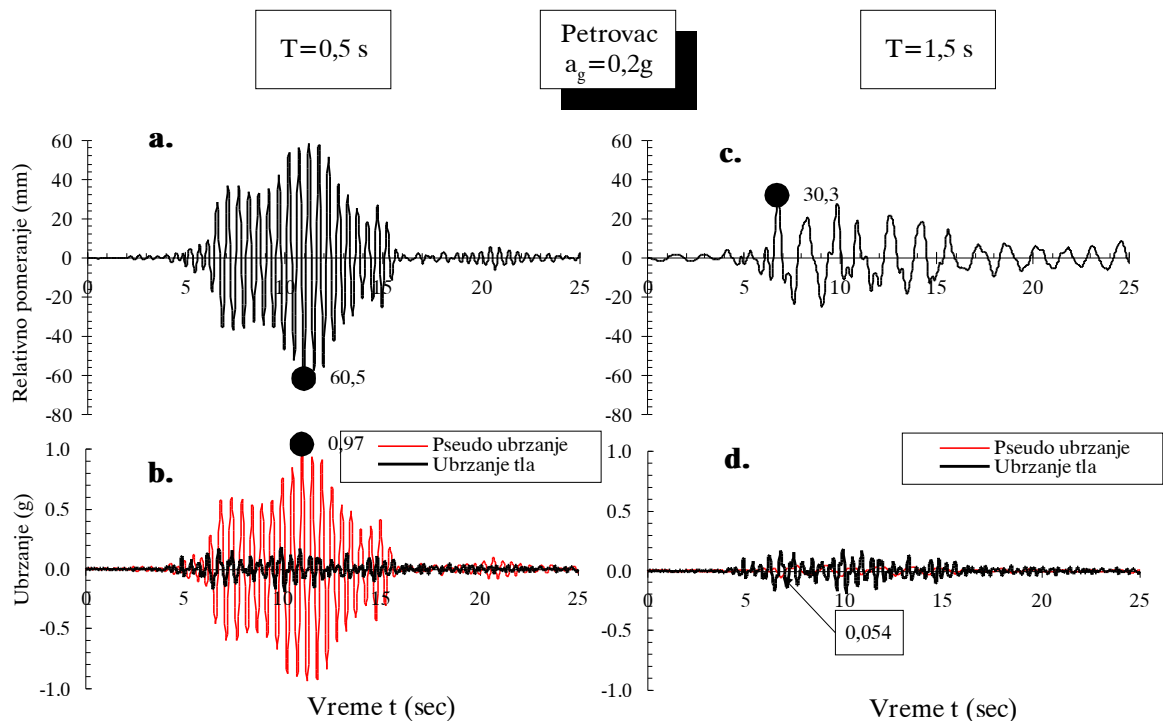
Na slici 2.4 prikazani su rezultati analize sa korakom integracije od 0,02 sekunde: ukupna - apsolutna pomeranja tla odnosno mase konstrukcije (sl.2.4.a i d), relativna pomeranja mase u odnosu na temelj (sl.2.4.b i e) kao i vrednosti ubrzanja tla odnosno pseudo ubrzanja mase konstrukcije $A(t)/g$, (sl.2.4.c i f).

Tlo sa sobom "nosi" konstrukciju, i nizom impulsa ubrzanja u toku vremena izaziva sopstvene oscilacije i relativna pomeranja mase. Nepravilan niz impulsa u oba slučaja izaziva oscilacije konstrukcije sa periodama praktično jednakim sopstvenim periodima oscilovanja $T=0,5$ odnosno $T=1,5s$. Konstrukcija sa nižom periodom $T=0,5s$ ima manja relativna pomeranja u odnosu na mekšu konstrukciju, što je opšti trend i za druge zapise, ali ne i pravilo.

U oba slučaja maksimalno ubrzanje tla je naravno $0,2g$, ali se kod krūće konstrukcije, sa nižom periodom ubrzanja mase dodatno uvećavaju, *amplifikuju* na iznos $0,58g$, dok je u slučaju "mekše" konstrukcije pseudo ubrzanja od $0,12g$ manje od ubrzanja tla. Vrednost faktora *amplifikacije* - odnos maksimalnog ubrzanja konstrukcije i tla iznosi $\beta_0 = 0,58g/0,2g = 2,9$ ($T=0,5s$) odnosno $\beta_0 = 0,12g/0,2g = 0,6$ ($T=1,5s$).

Primer 2.2.....

Njumarkovom metodom odrediti odgovor elastične konstrukcije sa jednim stepenom slobode za uticaj zapisa Petrovac prema slici 1.3.d, skaliranog na maksimalno ubrzanje tla $a_g=0,2g$. Analizirati dva slučaja konstrukcija, sa periodom sopstvenih oscilacija $T=0,5s$ odnosno $T=1,5s$. Za vrednost koeficijenta prigušenja usvojiti $\xi=5\%$.



Slika 2.5 Odgovor konstrukcije na zapis Petrovac

Na slici 2.5 prikazani su rezultati analize sa korakom integracije od 0,02 sekunde: relativna pomeranja mase u odnosu na temelj (sl.2.5.a i c) kao i vrednosti ubrzanja tla odnosno pseudo ubrzanja mase konstrukcije $A(t)/g$, (sl.2.5.b i d).

U ovom slučaju konstrukcija sa nižom periodom ima veća relativna pomeranja. Ubrzanja kruće konstrukcije se amplifikuju 4,85 puta na iznos od čak 0,97g, dok u slučaju mekše konstrukcije, pseudo ubrzanje iznosi samo 0,054g.

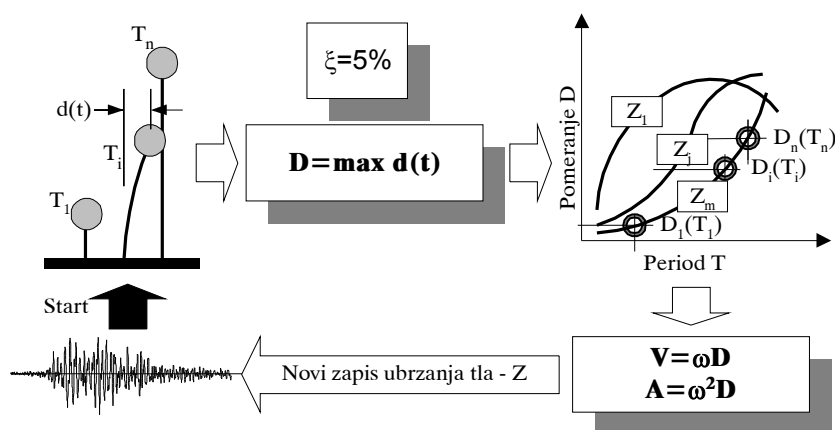
Dva navedena primera pokazuju da za odgovor konstrukcije nije bitan samo iznos maksimalnog ubrzanja tla nego i predominantni period oscilacija tla T_g , slika 1.4.c kao i *frekventne karakteristike zemljotresa* - tok promene ubrzanja u vremenu. Sa druge strane, za isti zapis, odgovor konstrukcija sa *različitim periodama* sopstvenih oscilacija se razlikuje.

2.2 SPEKTRI ODGOVORA ELASTIČNIH SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE KRETANJA

Za isti zapis ubrzanja tla $d''_g(t)$, svi elastični sistemi sa istim periodom T , odnosno kružnom frekvencom sopstvenih oscilacija ω ($m/k=\text{const}$) i prigušenjem ξ ponašaju se identično u toku trajanja zamljotresa, i dostižu iste *ekstremne vrednosti* relativnih pomeranja, relativnih brzina odnosno totalnih - pseudo ubrzanja. Ukoliko se ordinate ubrzanja tla pomnože, normalizuju faktorom α , u istom odnosu promeniće se i odgovorajuće ekstremne vrednosti.

Projektante u praksi obično interesuju upravo ove ekstremne vrednosti, jer definišu maksimalno naprezanje i pomeranje konstrukcije, ali za *očekivani zemljotres* na datoj lokaciji, za koji se eventualno zna *očekivano maksimalno ubrzanje tla* a_g , ali ne i tok, frekventne karakteristike zemljotresa. Zbog toga se za analizu najčešće koriste zapisi *dogođenih zemljotresa*, ili se matematički formiraju simulacije - *sintetizovani zapisi* ubrzanja tla, skalirani na očekivano maksimalno ubrzanje tla a_g .

Postupkom prikazanim u prethodnim primerima, efekti pojedinih zapisa Z ubrzanja tla na konstrukcije sa različitim priodama T_i mogu da se sistematizuju u obliku *spektra odgovora*, koji prikazuju *maksimalni odgovor konstrukcije - pomeranje, brzinu ili ubrzanje*, čiji je algoritam prikazan na slici 2.6.



Slika 2.6 - Algoritam formiranja spektra odgovora

Za izabrani zapis Z (El Centro na primer), numeričkom integracijom sračunava se odgovor konstrukcija sa različitim periodama $T_1 - T_n$. Za svaku od perioda T_i , registruje se

maksimalno sračunato pomeranje sistema $D = \max d(t)$, na osnovu čega se formira dijagram, *spektar pomeranja* $D(T)$ za zapis Z. Umesto sračunatih maksimalnih relativnih brzina i totalnih ubrzanja, obično se koriste *pseudo vrednosti brzina* - $V = \omega D$ odnosno *pseudo ubrzanja* $A = \omega^2 D$, za koja je rečeno da su praktično jednaka *totalnim ubrzanjima* mase. Postupak se ponavlja sa novim zapisima ubrzanja tla (Petrovac na primer), čime se dobija familija spektra odgovora, koji se obično *normalizuju* ili na ubrzanje zemljine teže g , ili na maksimalno očekivano ubrzanje tla a_g .

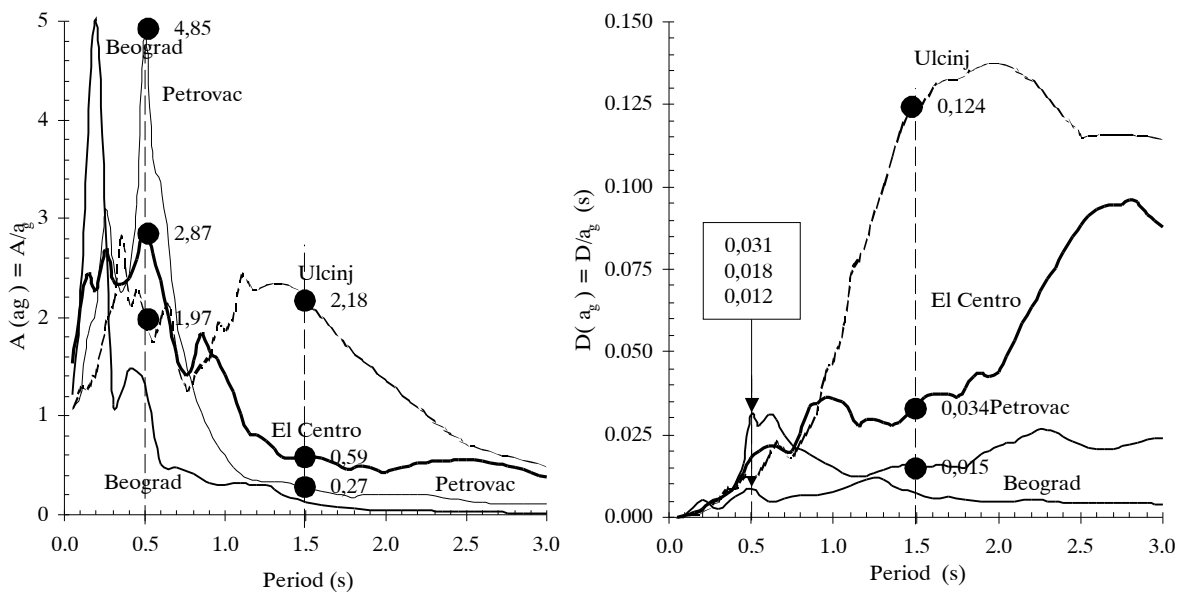
Primer 2.3.....

Za zapise ubrzanja tla El Centro, Petrovac, Ulcinj i Beograd, formirati elastične spektre pseudo ubrzanja i relativnih pomeranja u intervalu perioda $T=0,02 - 3,0s$, prigušenje $\xi=5\%$.

Na slici 2.7 prikazani su rezultati proračuna, normalizovani na maksimalno ubrzanje tla a_g . Na dijagramima su označene i prethodno dobijene vrednosti iz primera 2.1 i 2.2.

Opšti trend je da sa produženjem perioda oscilacija konstrukcije opada vrednost *maksimalnih ubrzanja* ali i raste vrednost *maksimalnih pomeranja* konstrukcije.

Zapisi Petrovac i Ulcinj registrovani su istovremeno, pri istom zemljotresu, ali na različitim lokacijama. Razlike spektara odgovora ukazuju na značaj *lokalnih efekata tla*, koji mogu znatno da izmene frekventni sastav oscilacija tla koje potiču iz istog izvora - žarišta zemljotresa.



Slika 2.7 Spektar odgovora: a) pseudo ubrzanja i b) relativnog pomeranja elastičnog sistema

Primer 2.4.....

Za elastičnu konstrukciju sa periodom oscilovanja $T=1,5s$, odrediti maksimalno relativno pomeranje i ubrzanje za efekte zemljotresa "tipa" El Centro sa maksimalnim ubrzanjem tla $a_g = 0,2g$.

Prema slici 2.7.b, maksimalno pomeranje iznosi

$$D = a_g D(a_g) = 0,2g \times 0,034 = 0,2 \times 9810 \times 0,034 = 66,7 \text{ mm.}$$

Prema slici 2.7.a, maksimalno ubrzanje iznosi

$$A = a_g A(a_g) = 0,2g \times 0,59 = 0,118g \quad (= \omega^2 D / g = (2\pi / 1,5)^2 \times 66,7 / 9810)$$

Za sistem sa masom m , maksimalna vrednost reakcije konstrukcije - računskog seizmičkog opterećenja F iznosi

$$F = mA = 0,118mg$$

Transverzalna sila i moment uklještenja konzole visine H iznose $Q=F$ odnosno $M=FH$.

Primer 2.5.....

Za konzolu visine $H=6,67m$, sa težinom konstrukcije na vrhu $W=300 kN$, odrediti potreban moment inercije I stuba punog kvadratnog poprečnog preseka, tako da pri zemljotresu El Centro, sa maksimalnim ubrzanjem tla od $a_g=0,2g$ pomeranje vrha konzole D bude jednako 1% od visine konzole H . Modulo elastičnosti beton $E=250 GPa$.

Masa konstrukcije iznosi

$$m = W/g = 300/9,81 = 30,58 kNs^2/m$$

Dozvoljeno pomeranje vrha konstrukcije iznosi

$$\max D = 1\%H = 0,01 \times 6,670 m = 0,0667 m \text{ odnosno}$$

$$\max D/a_g = 0,0667/0,2 \times 9,81 = 0,034 s$$

Prema slici 2.7.b, za zapis El Centro i vrednost $D(a_g) = 0,034 s$, sledi da konstrukcija treba da ima period oscilovanja od $T=1,15s$. Kako je $T=2\pi\sqrt{(m\delta)}$, to pomeranje vrha konzole usled statičkog dejstva jedinične sile $\delta=1H^3/3EI$ treba da iznosi

$$\delta = (T/2\pi)^2/m = (1,5/2\pi)^2/30,58 = 1,86 \cdot 10^{-3} m \quad \text{pa je}$$

$$potI = H^3/3E\delta = 6,67^3/3 \times 2,5 \cdot 10^7 \times 1,86 \cdot 10^{-3} = 2,12 \cdot 10^{-3} m^4.$$

Potrebna dimenzija b stuba kvadratnog poprečnog preseka iznosi

$$b = (12 \times potI)^{1/4} = (12 \times 2,12 \cdot 10^{-3})^{1/4} = 0,40 m.$$